
Mécanique des Milieux Continus

GUILLAUME PUEL

CENTRALESUPÉLEC
2023–2023
1EL5000

Crédits images et photos : **32.** Wikimedia Commons / McSush / CC-BY-SA-3.0 et Wikimedia Commons / Kaboldy / CC-BY-SA-3.0 – **44.** Wikimedia Commons / Cdang / CC-BY-SA-3.0 – **45.** Wikimedia Commons / Cdang / CC-BY-SA-3.0 et https://www.samhs.org.au/Virtual%20Museum/Medicine/Apothecary_scales/Apothecary_scales.html – **55.** Wikimedia Commons / Nordelch / CC-BY-SA-3.0 – **73.** Université Numérique des Sciences Odontologiques Francophones – **75.** Wikimedia Commons / Sigmund / CC-BY-SA-3.0 – **76.** Wikimedia Commons / Sigmund / CC-BY-SA-3.0 et Wikimedia Commons / CTho / CC-BY-SA-3.0 – **76.** Wikimedia Commons / Cdang / CC-BY-SA-3.0 – **77.** Wikimedia Commons / Aboalbiss / CC-BY-SA-3.0 et Wikimedia Commons / Sigmund / CC-BY-SA-3.0 – **86.** École des Mines d’Albi-Carmaux / CC-BY-NC-SA-4.0 – **86.** École des Mines d’Albi-Carmaux / CC-BY-NC-SA-4.0 – **86.** https://www.researchgate.net/publication/257920095_Platine_de_traction_in-situ_l'emergence_des_bandes_de_glissement_dans_le_nickel – **88.** Wikimedia Commons / Betienne / CC-BY-SA-3.0 – **92.** http://www.si.ens-cachan.fr/accueil_V2.php?page=affiche_ressource&id=178 – **94.** <http://classes.mst.edu/civeng2211/index.html> – **96.** M. Taroni, Snecma Moteurs, 2001 – **98.** J. Salençon, *Mécanique des milieux continus*, Éditions de l’École Polytechnique, 2007 – **155, 161 et 163.** https://eduscol.education.fr/sti/si-ens-cachan/ressources_pedagogiques/mise-en-evidence-du-domaine-de-validite-de-la-theorie-des-poutres – **196.** <http://www.tboake.com/SSEF1/pin.shtml> – **197.** Wikimedia Commons / Roulex45 / CC-BY-SA-3.0 et Wikimedia Commons / K800i / CC-BY-SA-3.0 – **198.** Wikimedia Commons / Roulex45 / CC-BY-SA-3.0 – **208.** Wikimedia Commons / Volpe National Transportation Systems Center (USA) – **211.** Wikimedia Commons / Saint Martin / CC-BY-SA-3.0

© 2023 – G. PUEL

Style L^AT_EX inspiré de <http://www.latextemplates.com>

Septembre 2023

Ce polycopié est structuré de façon à hiérarchiser les notions et illustrations abordées au sein du cours de Mécanique des Milieux Continus ; la mise en forme des différents éléments qui le constituent est détaillée ci-dessous. En outre, une table des matières et un index permettent d'accéder directement à la notion recherchée.

COMMENT UTILISER CE POLYCOPIÉ ?

Le corps du texte permet une présentation argumentée et logique des différentes notions abordées dans le cours de Mécanique des Milieux Continus, ainsi que les raisonnements de base permettant de résoudre les problèmes rencontrés : c'est le niveau de lecture conseillé pour une bonne appropriation du cours.

Définitions. Les définitions décrivent les différentes notions qui permettent de poser un problème de Mécanique des Milieux Continus, tout en introduisant le vocabulaire adapté à ce domaine.

Résumé 0.1 — Principe et avertissement. Les résumés rappellent de façon synthétique les éléments de base nécessaires à la compréhension et la résolution des problèmes rencontrés en Mécanique des Milieux Continus ; seuls, ces éléments de base sont insuffisants pour une mise en œuvre maîtrisée des différents concepts abordés cette année.

■ **Exemple 0.1 — Illustrations et applications.** Les exemples servent d'appuis pratiques à la compréhension des notions et concepts présentés dans le cours, et permettent d'illustrer l'utilisation des outils de la Mécanique des Milieux Continus à divers domaines d'application ; ils peuvent être sautés en première lecture. ■



Les points d'attention indiquent les erreurs ou confusions classiques à éviter absolument ; ils contribuent à une compréhension plus fine des notions abordées.



Les remarques permettent de donner quelques éléments d'approfondissement ou d'ouverture qui complètent le cadre exposé dans ce document.

Nous avons choisi d'utiliser, dans ce polycopié, un formalisme unifié reposant sur la représentation intrinsèque des vecteurs et des matrices, qui se traduit notamment par les notations suivantes.

QUELLES NOTATIONS ?

Vecteurs

Les vecteurs de l'espace sont notés en gras : $\mathbf{a}$, de composantes scalaires a_n dans une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ de l'espace. Parmi les principales notations, on utilisera alors :

- pour le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$;
- pour la norme d'un vecteur $\mathbf{a}$: $\|\mathbf{a}\|$;
- pour le produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

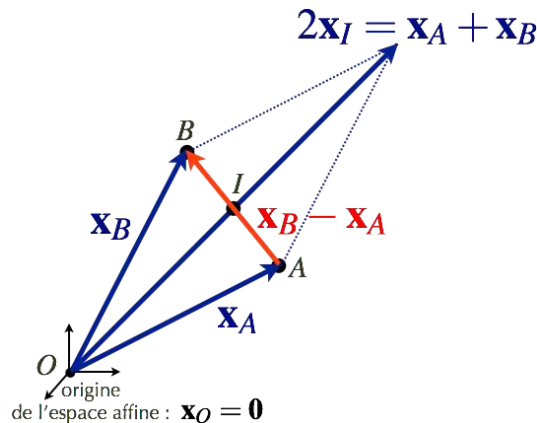
Plus de précisions sur les définitions mathématiques de ces notions pourront être trouvées dans l'annexe A.1.1.

Points

Les points de l'espace sont considérés par l'intermédiaire de leur vecteurs positions : on associe ainsi au point A le vecteur position $\mathbf{x}_A$ associé. Ceci implique par exemple que :

- le vecteur qui relie un point A à un point B s'écrit comme $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$;
- l'origine O de l'espace vérifie $\mathbf{x}_O = \mathbf{0}$;
- le milieu I du segment $[AB]$ est tel que $\mathbf{x}_I = (\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B)/2$.

Par souci de simplification, on notera $\mathbf{x}$ le vecteur position associé au point courant M .



Matrices (ou tenseurs d'ordre deux)

Les matrices sont notées avec des lettres doubles : $\mathbb{A}$, de composantes scalaires A_{mn} dans une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ de l'espace. On note alors :

- le produit $\mathbf{b}$ d'une matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur $\mathbf{a}$: $\mathbf{b} = \mathbb{A}\mathbf{a}$;
- le produit $\mathbb{C}$ de deux matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$: $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$;
- la transposée d'une matrice $\mathbb{A}$: $\mathbb{A}^T$;
- l'inverse d'une matrice $\mathbb{A}$: $\mathbb{A}^{-1}$.

Plus de précisions sur les définitions mathématiques de ces notions pourront être trouvées dans l'annexe A.2.1.



Table des matières

1	Déformations	3
1.1	Description lagrangienne du mouvement	3
1.1.1	Formulation générique	3
1.1.2	Vitesses et accélérations matérielles	7
1.2	Déformation d'un milieu continu	9
1.2.1	Tenseur gradient de la transformation	9
	Expressions tensorielles	12
1.2.2	Tenseur des déformations de Green-Lagrange	15
	Variation de longueur au voisinage d'un point matériel	15
	Variation d'angle au voisinage d'un point matériel	17
	Interprétation	19
1.3	Tenseur des petites déformations	22
1.3.1	Hypothèse des petites perturbations	22
1.3.2	Définition et propriétés	23
	Expressions tensorielles	24
	Interprétation	26
1.3.3	Étude des petites perturbations locales	28
	Transformation du voisinage d'un point	28
	Analyse locale des déformations	30
	Mesure de déformations	31
1.4	Variation de volume et conservation de la masse	33
1.4.1	Variation de volume	33
1.4.2	Conservation de la masse	36
	Expression matérielle	36
	Incompressibilité	36
1.5	Résumé des formules importantes	37

2	Contraintes	39
2.1	Relations fondamentales de la dynamique pour un domaine matériel	39
2.1.1	Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique	39
	Conservation de la quantité de mouvement	40
	Conservation du moment cinétique	41
2.1.2	Actions mécaniques	42
2.1.3	Équilibre statique	44
	Équilibre d'un domaine matériel soumis à deux glisseurs	44
	Équilibre d'un domaine matériel soumis à trois glisseurs	45
2.2	Notion de contrainte	46
2.2.1	Efforts intérieurs	46
	Modélisation	46
	Prise en compte	47
2.2.2	Tenseur des contraintes	48
	Principe d'action-réaction	48
	Linéarité du vecteur contrainte	49
	Représentation mathématique	50
	Propriété de symétrie	54
2.3	Équation d'équilibre local	57
2.3.1	Obtention de l'équation	57
	Expressions tensorielles de la divergence du tenseur des contraintes	61
2.3.2	Résolution de l'équation	63
	Conditions sur la frontière extérieure	63
	Conditions sur une interface intérieure	65
2.4	Résumé des formules importantes	67
3	Critères de résistance	69
3.1	Essais de caractérisation mécanique	69
3.1.1	Essai de traction simple	70
	Détermination de l'état de contrainte	70
	Courbes de traction	72
	Ordres de grandeur	74
3.1.2	Types de rupture	75
	Rupture fragile	75
	Rupture ductile	76
3.2	Critères	77
3.2.1	Étude locale des contraintes	77
	Grandeurs liées au choix de la facette	77
	Contraintes principales	79
	Représentation de Mohr	81
3.2.2	Critères de rupture par clivage	82
3.2.3	Critères de rupture par cisaillement	85
	Critère basé sur cisaillement maximal	87
	Critère « alternatif »	88
3.2.4	Autres critères	91
	Critère de Tsai-Hill	91
	Critère de Mohr-Coulomb	92

3.3	Concentrations de contraintes	93
3.3.1	<i>Influence d'un trou</i>	93
	Plaque avec trou circulaire en traction simple	93
	Du trou à la fissure	95
3.3.2	<i>Influence de la géométrie</i>	97
3.4	Résumé des formules importantes	99
4	Comportement des matériaux	101
4.1	Comportement mécanique des solides déformables	101
4.1.1	<i>Bilan des inconnues et des équations du problème</i>	101
4.1.2	<i>Diversité des comportements</i>	102
4.1.3	<i>Comportement élastique linéaire dans le cadre HPP</i>	105
	Représentation mathématique de la relation de comportement	106
	Notation de Voigt	107
4.2	Comportement élastique linéaire isotrope dans le cadre HPP	107
4.2.1	<i>Hypothèse d'isotropie</i>	108
4.2.2	<i>Lien avec l'essai de traction</i>	109
	Construction pratique de la relation de comportement	110
	Valeurs usuelles des paramètres	111
4.3	Comportement thermoélastique dans le cadre HPP	115
4.3.1	<i>Cadre de la thermoélasticité linéaire</i>	115
4.3.2	<i>Traitement d'un problème de thermoélasticité</i>	116
4.4	Résumé des formules importantes	120
5	Élasticité infinitésimale	121
5.1	Poser un problème d'élasticité	121
5.1.1	<i>Équations à résoudre</i>	121
5.1.2	<i>Conditions aux limites</i>	123
	Conditions sur la frontière extérieure	123
	Conditions sur les frontières intérieures	124
5.1.3	<i>Propriétés de la solution</i>	126
	Unicité dans le cadre statique	126
	Unicité dans le cadre dynamique	128
5.2	Méthodes de résolution d'un problème d'élasticité	129
5.2.1	<i>Approche en déplacement</i>	129
	Stratégie de résolution en déplacement	129
	Équation de Navier	132
5.2.2	<i>Approche en contraintes</i>	133
	Stratégie de résolution en contraintes	133
	Équations de compatibilité	136
5.2.3	<i>Résolutions approchées</i>	139
	Principe de Saint-Venant	139
	Vers des résolutions numériques.	141
5.3	Simplifications d'un problème d'élasticité	143
5.3.1	<i>Principe de superposition</i>	143
5.3.2	<i>Élasticité plane</i>	145
	Déformations planes	145

Contraintes planes	146
Axisymétrie	148
5.3.3 <i>Prise en compte de plans de symétrie</i>	149
5.4 Résumé des formules importantes	151
6 Approximation des poutres	153
6.1 Cinématique d'une poutre	153
6.1.1 <i>Géométrie et paramétrage</i>	153
6.1.2 <i>Hypothèse de section indéformable</i>	154
Expression du déplacement	155
Tenseur des petites déformations	157
6.1.3 <i>Hypothèse d'Euler-Bernoulli</i>	161
Expression du déplacement	161
Tenseur des petites déformations	162
6.2 Efforts intérieurs dans une poutre	165
6.2.1 <i>Hypothèse sur les contraintes</i>	165
6.2.2 <i>Résultante des efforts intérieurs et équilibre associé</i>	166
Équilibre en résultante : approche globale	167
Équilibre en résultante : approche locale	171
6.2.3 <i>Moment des efforts intérieurs et équilibre associé</i>	173
Équilibre en moment : approche globale	174
Équilibre en moment : approche locale	178
6.2.4 <i>Diagrammes des efforts intérieurs</i>	180
6.3 Relation de comportement poutre	181
6.3.1 <i>Relations locales</i>	181
6.3.2 <i>Relation de comportement pour la résultante des efforts intérieurs</i>	182
6.3.3 <i>Relation de comportement pour le moment des efforts intérieurs</i>	183
Tenseur $\mathbb{J}$: propriétés et calcul pratique	184
6.3.4 <i>Estimation des contraintes dans la section</i>	191
6.4 Liaisons entre poutres	194
6.4.1 <i>Cinématique associée à une liaison</i>	194
Liaison encastrement	194
Liaison sphérique	196
Liaison pivot	197
Liaison sphère-cylindre	198
6.4.2 <i>Efforts de liaison</i>	198
6.4.3 <i>Résolution complète d'un problème de poutres</i>	200
Problèmes isostatiques	200
Problèmes hyperstatiques	203
6.5 Flambement des poutres droites	207
6.5.1 <i>Équation d'équilibre local en moment dans la configuration déformée</i>	208
6.5.2 <i>Flambage linéarisé</i>	209
6.6 Résumé des formules importantes	212
A Algèbre tensorielle	215
A.1 Vecteurs	215
A.1.1 <i>Définitions et notations</i>	215

A.1.2	Bases classiques	216
	Base cartésienne	216
	Base cylindrique	217
	Base sphérique	217
A.2	Tenseurs d'ordre deux	218
A.2.1	Définitions et propriétés	218
	Produit tensoriel de deux vecteurs	219
	Partie symétrique et partie antisymétrique	220
A.2.2	Produit scalaire et norme de tenseurs	220
	Trace d'un tenseur	220
	Propriétés	221
A.2.3	Déterminant d'un tenseur et relations remarquables	221
	Définition et propriétés	221
	Formule de Piola	222
A.2.4	Invariants d'un tenseur	222
	Décomposition spectrale d'un tenseur	222
	Invariants	222
A.2.5	Racine carrée d'un tenseur	223
	Définition et propriétés	223
	Décomposition polaire d'un tenseur	223
A.2.6	Tenseurs de rotation	223
	Définition et propriétés	223
	Axe et angle d'une rotation	224
	Cas d'une « petite » rotation	225
A.3	Tenseurs d'ordre quatre	225
A.3.1	Définition et propriétés	225
A.3.2	Formes particulières	226
	Orthotropie	226
	Symétrie cubique	226
	Isotropie transverse	227
	Isotropie	227
B	Analyse tensorielle	229
B.1	Dérivation	229
B.1.1	Opérateurs spatiaux classiques	229
	Gradient	229
	Divergence	230
	Rotationnel	230
	Laplacien	231
B.1.2	Formules utiles	231
	Relations vectorielles	231
	Relations tensorielles	231
B.1.3	Dérivation temporelle	232
	Principe général	232
	Vecteur vitesse de rotation	233
B.2	Transformations d'intégrales	233
B.2.1	Changements de variables	233
	Intégrale de volume	233
	Intégrale de surface	234

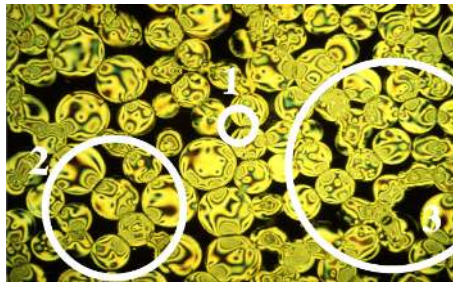
B.2.2	<i>Formules de Stokes</i>	234
	Formule du gradient	234
	Formule de la divergence	235
	Formules dérivées	236
B.3	Formulaires	236
B.3.1	<i>Changement de coordonnées</i>	236
B.3.2	<i>Coordonnées cylindriques</i>	236
	Expression des opérateurs classiques	237
	Équations de la mécanique	238
B.3.3	<i>Coordonnées sphériques</i>	238
	Expression des opérateurs classiques	239
	Équations de la mécanique	240
	Références bibliographiques	241
	Ouvrages	241
	Articles	241
	Index	243

Avant-propos

L'objet de la Mécanique des Milieux Continus est de prédire les mouvements d'un milieu matériel, qu'il soit solide ou fluide, et de les relier aux causes qui les provoquent ; il est donc nécessaire de comprendre de façon approfondie les mécanismes de déformations de ces milieux et d'appréhender les efforts qui se développent en leur sein. Pour cela, la démarche se situe à l'échelle **macroscopique**, sans forcément établir un lien quantitatif avec la nature des forces atomiques ou moléculaires : on définit alors un **milieu continu** équivalent, dont la « forme » mathématique autorise le recours aux outils de l'analyse, tels que le calcul différentiel et intégral, qui permettent de résoudre, de façon exacte ou approchée, des équations aux dérivées partielles.

La question qui se pose alors est de savoir comment on peut définir ce milieu continu équivalent ; si l'on prend l'exemple d'une quantité physique telle que la masse volumique, dans le cas d'un milieu constitué d'un ensemble de billes en contact les unes avec les autres (comme sur l'image plus bas), on s'aperçoit que cette quantité évolue de façon typique suivant l'échelle d'observation de ce milieu :

- en-dessous d'une certaine taille d'échantillon (c'est-à-dire à l'échelle « microscopique »), l'organisation de la matière est hétérogène (voire discrète, comme dans l'exemple envisagé), si bien que la masse volumique moyenne estimée pour différents échantillons de cette taille varie très fortement d'un échantillon à l'autre, comme si elle était aléatoire ;
- à partir d'une certaine taille d'échantillon, supérieure à l'ordre de grandeur de la taille des hétérogénéités, la masse volumique moyenne n'évolue plus beaucoup, sur de faibles distances ; on se trouve alors à l'échelle « mésoscopique » ;
- sur de plus grandes distances (typiquement de l'ordre de grandeur de la taille du domaine considéré), la masse volumique moyenne peut de nouveau varier de façon significative, dans le cas d'un matériau hétérogène, mais il s'agit cette fois-ci de fluctuations à l'échelle « macroscopique ».



Pour que l'on puisse définir un milieu continu équivalent, l'échantillon analysé doit donc être de taille grande par rapport à celle des hétérogénéités locales, mais de taille petite par rapport au domaine que l'on étudie ; dans l'exemple ci-dessus, on constate que l'échantillon 1 est trop petit, et que l'échantillon 3 est de taille suffisante pour modéliser ce milieu comme un milieu continu, en ne rentrant pas dans le détail du comportement de contact frottant des billes les unes avec les autres, et constitue un « volume élémentaire représentatif » de ce milieu continu. On finit ainsi par modéliser la masse volumique du milieu comme une fonction continue des coordonnées du point considéré ; par abus de langage, on parle de « **particule matérielle** » pour désigner ce point, mais ceci signifie en fait que l'on considère une grandeur physique définie comme une moyenne sur un sous-domaine (celui de la particule matérielle), et que la taille de ce sous-domaine fait que, à l'échelle du domaine considéré, on peut supposer cette grandeur ponctuelle.



1. Déformations

Tous les corps se déforment. La modélisation de la mise en forme des matériaux (comme l'emboutissage) d'une part, ou l'analyse de l'écoulement de polymères d'autre part, nécessitent de quantifier les grandes déformations. À l'inverse, pour éviter la rupture, la plupart des matériaux utilisés dans l'industrie ou la construction pour supporter ou transmettre des charges doivent se déformer peu. Dans tous les cas, ces déformations peuvent varier d'un point à l'autre au sein des corps étudiés, et leur description dépend des directions considérées.

POURQUOI ÉTUDIER LES DÉFORMATIONS ?

1.1 Description lagrangienne du mouvement

Dans le cas d'un domaine matériel déformable, un cadre pertinent est de mettre en évidence une configuration privilégiée, qui sert de référence dans le cadre d'une description dite « lagrangienne » du mouvement : il s'agit habituellement de l'état du domaine lorsqu'il n'est soumis à aucune sollicitation extérieure. Cette configuration est souvent qualifiée de « non déformée » (au sens intuitif du terme), ou « initiale » (en associant un instant $t = 0$), par opposition à ce qui est décrit ensuite, qui correspond à une configuration dite « déformée », ou « actuelle » (à l'instant t courant).

1.1.1 Formulation générique

On considère un domaine Ω dont on suit les particules matérielles au cours du temps, comme représenté sur la figure 1.1 :

- à l'instant initial $t = 0$, le domaine est non déformé, et on repère chaque particule de Ω par son vecteur position $\mathbf{p}$, de coordonnées (p_1, p_2, p_3) données dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ donnée ; le domaine spatial occupé par l'ensemble des particules de Ω est alors noté Ω_0 ;
- à l'instant actuel t donné, les particules ont pu changer de positions par rapport à la configuration initiale ; on suppose alors que l'on peut se donner la position actuelle de chaque particule matérielle de Ω , notée $\mathbf{x}$, comme une fonction vectorielle connue $\mathbf{f}$, appelée « placement » ;

ce dernier dépend du temps, mais aussi du vecteur $\mathbf{p}$ qui permet d'« identifier » la particule que l'on est en train de suivre au cours du temps :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t), \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

Les particules de Ω occupent désormais un domaine spatial noté Ω_t , défini comme :

$$\Omega_t = \{\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) | \forall \mathbf{p} \in \Omega_0\}$$

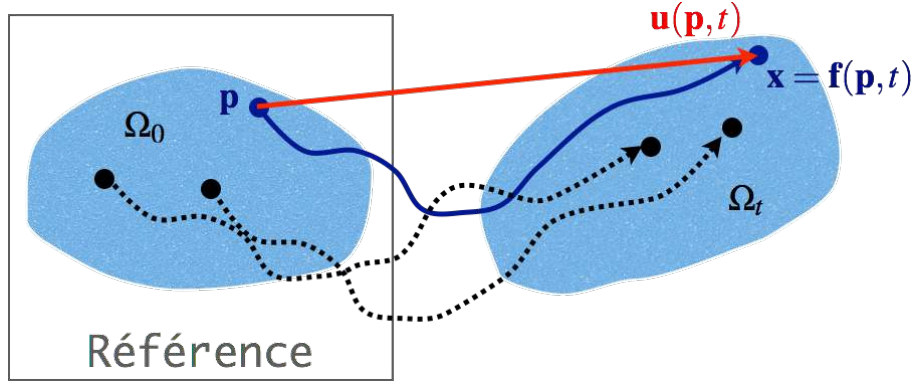


FIGURE 1.1 – Placement et déplacement des particules d'un domaine matériel Ω .

La connaissance de la fonction de placement $\mathbf{f}$ au cours du temps permet donc de décrire la transformation du domaine Ω : on définit ainsi des trajectoires des différents points matériels de Ω , dont on peut bien sûr spécifier les composantes dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ donnée :

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(p_1, p_2, p_3, t) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}, t), \mathbf{i}_1 \rangle \\ x_2 &= f_2(p_1, p_2, p_3, t) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}, t), \mathbf{i}_2 \rangle \\ x_3 &= f_3(p_1, p_2, p_3, t) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}, t), \mathbf{i}_3 \rangle \end{aligned}$$

en notant que l'on a nécessairement la condition de compatibilité $\mathbf{f}(\mathbf{p}, 0) = \mathbf{p}$, soit :

$$\begin{aligned} f_1(p_1, p_2, p_3, 0) &= p_1 \\ f_2(p_1, p_2, p_3, 0) &= p_2 \\ f_3(p_1, p_2, p_3, 0) &= p_3 \end{aligned}$$



Ainsi, il faut bien distinguer la quantité $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$, qui donne la position, à l'instant actuel, d'une particule matérielle donnée, de la quantité notée simplement $\mathbf{x}$, qui désigne un point de l'espace, indépendamment de la particule qui pourrait s'y trouver (et donc du temps).

En pratique, on notera souvent $\mathbf{x}$ seulement, quand il n'y a aucun risque de confusion.

Champ de déplacement. On appelle déplacement d'une particule matérielle le vecteur $\mathbf{u}$ qui relie la position initiale de cette dernière à sa position actuelle :

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) - \mathbf{p}$$

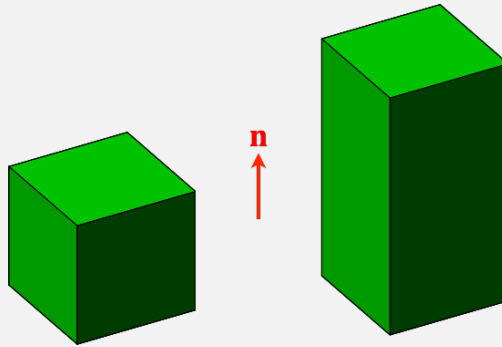
Les déplacements de l'ensemble des particules matérielles d'un domaine matériel Ω constituent, à un instant t donné, un champ de déplacement, défini sur la configuration initiale Ω_0 . La connaissance de ce champ est équivalente à celle du placement $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ sur tout le domaine.

■ **Exemple 1.1 — Allongement uniforme.** On considère un domaine matériel Ω subissant une transformation de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + a(t)\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où a est une fonction scalaire quelconque du temps, sans dimension, et $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire fixé.

La surface constituée de l'ensemble des points tels que $\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = C$, où C est une constante donnée, est une portion de plan animée d'un déplacement d'ensemble $\mathbf{u} = a(t)C\mathbf{n}$ selon la normale $\mathbf{n}$ à ce plan, et ne se déforme donc pas. Ce déplacement d'ensemble est d'autant plus important que la « coordonnée » C de cette surface par rapport à une origine donnée (associée à $\mathbf{p} = \mathbf{0}$) est grande : on parle alors d'allongement selon la direction $\mathbf{n}$, vu que tous les segments reliant deux points matériels, qui sont orientés initialement selon cette direction, voient leur longueur évoluer au cours du temps.



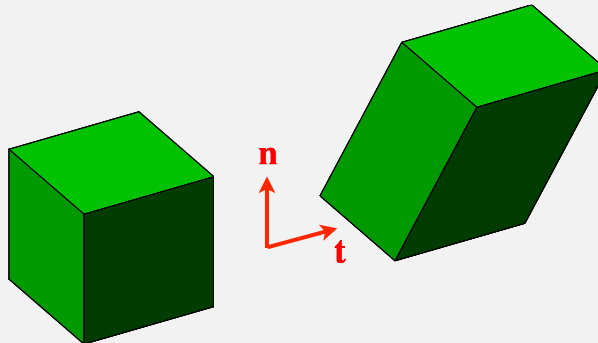
Le fait que cet allongement soit dit uniforme sera justifié dans l'exemple 1.11. ■

■ **Exemple 1.2 — Glissement uniforme.** On considère un domaine matériel Ω subissant une transformation de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + b(t)\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{t}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où b est une fonction scalaire quelconque du temps, sans dimension, et $\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}$ deux vecteurs unitaires fixés, perpendiculaires entre eux.

La surface constituée de l'ensemble des points tels que $\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = C$, où C est une constante donnée, est une portion de plan animée d'un déplacement d'ensemble $\mathbf{u} = b(t)C\mathbf{t}$ contenu dans le plan de cette dernière, et ne se déforme donc pas. Ce déplacement d'ensemble est d'autant plus important que la « coordonnée » C de cette surface par rapport à une origine donnée (associée à $\mathbf{p} = \mathbf{0}$) est grande : on parle alors de glissement sur un plan de normale $\mathbf{n}$ selon la direction $\mathbf{t}$. L'angle entre deux segments, reliant chacun deux points matériels, et initialement de directions $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$, évolue donc au cours du temps.



Le fait que ce glissement soit dit uniforme sera justifié dans l'exemple 1.13. ■

■ **Exemple 1.3 — Mouvement de solide indéformable.** On considère un domaine matériel Ω subissant une transformation de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{x}_A(t) + \mathbb{R}(t)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_A), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où $\mathbf{x}_A(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}_A, t)$ est le placement d'un point matériel A donné de Ω , et $\mathbb{R}(t)$ est une matrice de rotation, c'est-à-dire une matrice vérifiant $\mathbb{R}^T \mathbb{R} = \mathbb{I}$ (propriété d'orthogonalité, détaillée dans l'annexe A.2.6).

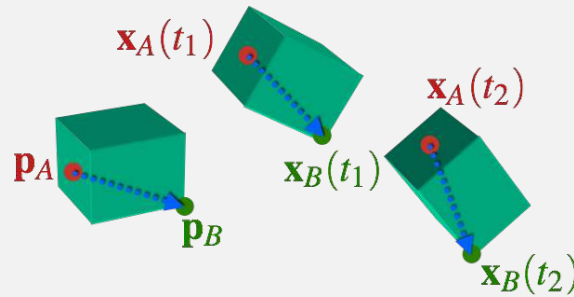
Ainsi, si l'on suit au cours du temps le vecteur reliant le point A à un point B donné de Ω , on trouve que :

$$\mathbf{x}_B(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}_B, t) = \mathbf{x}_A(t) + \mathbb{R}(t)(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A)$$

ce qui permet d'établir que :

$$\|\mathbf{x}_B(t) - \mathbf{x}_A(t)\|^2 = \langle \mathbb{R}(t)(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A), \mathbb{R}(t)(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \rangle = \langle \mathbb{R}(t)^T \mathbb{R}(t)(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A), \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A \rangle = \|\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A\|^2$$

compte tenu de la propriété d'orthogonalité des matrices de rotation. Tout segment reliant deux points du solide Ω est donc de longueur constante au cours du temps, mais sa direction peut évoluer de façon quelconque dans l'espace.



On constate enfin que, pour un tel mouvement, six paramètres sont nécessaires et suffisants pour décrire la position à un instant donné de l'ensemble des particules du domaine : physiquement, il s'agit :

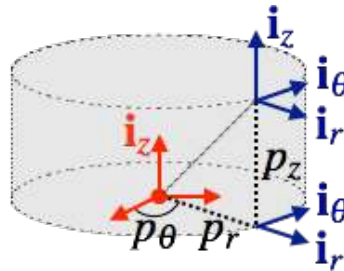
- de trois paramètres de translation, permettant de placer par exemple le point A utilisé plus haut ;
- et de trois paramètres de rotation, permettant d'orienter dans l'espace le vecteur reliant le point A à un point donné du solide.

On dit alors qu'un solide indéformable (sans liaison, c'est-à-dire libre dans l'espace) a six degrés de liberté. ■



Bien entendu, dans le cas d'un domaine courbe, on peut utiliser un système de coordonnées curvilignes associé à la géométrie pour décrire le placement du domaine matériel. Par exemple, dans le cas d'un domaine Ω de forme cylindrique d'axe $\mathbf{i}_z$, on peut utiliser une base cylindrique $(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)$, de coordonnées associées (p_r, p_θ, p_z) , pour définir le placement initial des particules de Ω :

$$\mathbf{p} = p_r \mathbf{i}_r(p_\theta) + p_z \mathbf{i}_z$$



ainsi que, pour le placement actuel, à l'aide des coordonnées (r, θ, z) :

$$\mathbf{x} = r \mathbf{i}_r(\theta) + z \mathbf{i}_z$$

avec la base cylindrique associée.

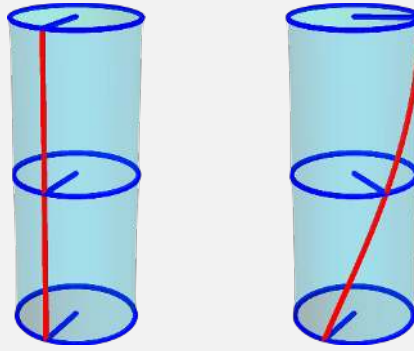
■ **Exemple 1.4 — Torsion d'un arbre cylindrique.** On considère un domaine matériel Ω , de forme cylindrique d'axe $\mathbf{i}_z$, de section circulaire de rayon R et de longueur L , subissant une transformation de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + p_r (\mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) - \mathbf{i}_r(p_\theta)), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où $\mathbf{p} = p_r \mathbf{i}_r(p_\theta) + p_z \mathbf{i}_z$ est le placement initial, et c est une fonction scalaire quelconque du temps, sans dimension. Cette transformation se traduit en termes de coordonnées cylindriques comme :

$$\begin{aligned} r &= p_r, \quad \forall p_r \in [0, R] \\ \theta &= p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L}, \quad \forall (p_\theta, p_z) \in [0, 2\pi[\times [0, L] \\ z &= p_z, \quad \forall p_z \in [0, L] \end{aligned}$$

Ainsi, toute section d'altitude p_z fixée subit une rotation de solide indéformable, d'axe $\mathbf{i}_z$ et d'angle $c(t)p_z/L$: $c(t)$ représente ainsi le décalage angulaire (en radians) imposé entre les deux sections extrêmes du cylindre.



En outre, une ligne initialement droite et parallèle à l'axe $\mathbf{i}_z$ du cylindre (en rouge ci-dessus) vérifie $p_r = C_1$ et $p_\theta = C_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes données. Elle se transforme donc à l'instant t comme :

$$\begin{aligned} r &= C_1 \\ \theta &= C_2 + \frac{c(t)p_z}{L}, \quad \forall p_z \in [0, L] \\ z &= p_z, \quad \forall p_z \in [0, L] \end{aligned}$$

c'est-à-dire comme une hélice d'axe $\mathbf{i}_z$, de même rayon C_1 et de pas $2\pi L/c(t)$. ■

1.1.2 Vitesses et accélérations matérielles

Comme la fonction de placement $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ permet de repérer la position de chaque particule à tout instant, il est naturel de définir la vitesse matérielle $\dot{\mathbf{x}}$ comme la variation du placement entre deux instants t et $t + \Delta t$ très proches, soit, en passant à la limite ($\Delta t \rightarrow 0$) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{p}, t), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

De même, l'accélération matérielle $\ddot{\mathbf{x}}$ se définit donc comme la dérivée seconde par rapport au temps du placement :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}(\mathbf{p}, t), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$



On a éludé volontairement pour le moment la question du « référentiel », qui définit la référence par rapport à laquelle on va exprimer les variations du placement, et par conséquent l'expression de sa dérivée temporelle. On suppose donc ici que les mouvements sont décrits par rapport à un observateur « fixe » sans plus de détails. Des précisions peuvent être trouvées dans [Bou87 ; Sal05].

■ **Exemple 1.5 — Allongement uniforme : vitesses et accélérations matérielles.** En dérivant par rapport au temps le champ de placement étudié dans l'exemple 1.1 :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + a(t) \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où a est une fonction scalaire quelconque du temps, et $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire fixé, on obtient le champ de vitesses matérielles suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{p}, t) = \dot{a}(t) \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

ainsi que le champ d'accélérations matérielles :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}(\mathbf{p}, t) = \ddot{a}(t) \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

Chaque plan d'équation $\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = C$ est constitué de particules qui présentent toutes la même vitesse $\dot{a}(t)C\mathbf{n}$ et la même accélération $\ddot{a}(t)C\mathbf{n}$, ce qui est logique vu que ce plan ne se déforme pas au cours du temps. ■



Il est possible d'adopter un autre point de vue : au lieu de considérer les vitesses et les accélérations propres à chaque particule, on peut privilégier le fait que, à un instant donné, on a une « carte » spatiale de vecteurs vitesses et accélérations, sans se préoccuper des particules associées à chaque point de l'espace ; dans cette description, les variables d'espace $\mathbf{x}$ et de temps t sont donc indépendantes l'une de l'autre.

Ce point de vue, où les vitesses et les accélérations sont dites « spatiales » (ou encore, « eulériennes »), est couramment adopté dans la description de la cinématique des milieux fluides, pour lesquels il n'est pas pertinent (et facile) de mettre en avant une configuration initiale, mais l'exemple suivant permet aussi d'illustrer ce point de vue dans le cas d'un milieu déformable solide.

■ **Exemple 1.6 — Torsion d'un arbre cylindrique : vitesses et accélérations matérielles.** En dérivant par rapport au temps le placement étudié dans l'exemple 1.4 (où $\mathbf{p} = p_r \mathbf{i}_r(p_\theta) + p_z \mathbf{i}_z$, et c est une fonction scalaire quelconque du temps) :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + p_r (\mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) - \mathbf{i}_r(p_\theta)), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

on obtient le champ de vitesses matérielles suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{p}, t) = p_r \frac{\dot{c}(t)p_z}{L} \mathbf{i}_\theta \left(p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L} \right)$$

vu que $\frac{d\mathbf{i}_r}{dt}(p_\theta(t)) = \dot{p}_\theta \mathbf{i}_\theta(p_\theta(t))$, soit, finalement :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\dot{c}(t)p_z}{L} \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{f}(\mathbf{p}, t), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

pour lequel on reconnaît l'expression classique, pour chaque particule, de la vitesse d'un point $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ en rotation autour de l'axe $\mathbf{i}_z$, et de vitesse angulaire $\dot{c}(t)p_z/L$.

De la même façon, le champ d'accélérations matérielles s'exprime comme :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}(\mathbf{p}, t) = p_r \frac{\ddot{c}(t)p_z}{L} \mathbf{i}_\theta \left(p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L} \right) - p_r \left(\frac{\dot{c}(t)p_z}{L} \right)^2 \mathbf{i}_r \left(p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L} \right)$$

vu que $\frac{d\mathbf{i}_\theta}{dt}(p_\theta(t)) = -\dot{p}_\theta \mathbf{i}_r(p_\theta(t))$, soit, finalement :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\ddot{c}(t)p_z}{L} \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) - \left(\frac{\dot{c}(t)p_z}{L} \right)^2 (\mathbf{f}(\mathbf{p}, t) - p_z \mathbf{i}_z), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

pour lequel on reconnaît l'expression classique, pour chaque particule, de l'accélération d'un point $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ en rotation autour de l'axe $\mathbf{i}_z$, de vitesse angulaire $\dot{c}(t)p_z/L$ et d'accélération angulaire $\ddot{c}(t)p_z/L$.

Il est remarquable que ces deux champs ne dépendent que des positions à l'instant t des particules considérées : il est en effet possible d'adopter une représentation spatiale (ou « eulérienne ») de ce mouvement, en écrivant la vitesse :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\dot{c}(t)z}{L} \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t$$

et, de même, l'accélération :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\ddot{c}(t)z}{L} \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{x} - \left(\frac{\dot{c}(t)z}{L} \right)^2 (\mathbf{x} - z\mathbf{i}_z), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t$$

comme des fonctions de l'espace (où $\mathbf{x}(r, \theta, z) = r\mathbf{i}_r(\theta) + z\mathbf{i}_z$ en coordonnées cylindriques) et du temps, indépendants l'un de l'autre. ■

1.2 Déformation d'un milieu continu

L'enjeu de cette partie est de définir la notion de déformation, qui permettra de décrire localement (c'est-à-dire au voisinage de n'importe quelle particule matérielle) aussi bien des variations de longueurs que des variations angulaires. Pour cela, il est nécessaire au préalable de pouvoir déterminer quantitativement comment évolue le voisinage d'une particule donnée au cours du temps.

1.2.1 Tenseur gradient de la transformation

On a évoqué précédemment que la notion de milieu continu devait s'interpréter aussi bien sur le plan physique que mathématique : dans ce dernier cas, ceci revient à considérer que la fonction de placement $\mathbf{f}$ est une fonction continue de l'espace, représenté par la position initiale $\mathbf{p}$ de chaque particule matérielle.

Afin de pouvoir décrire l'évolution de particules très proches d'une particule $\mathbf{p}$ donnée, on souhaite alors écrire le développement limité de la fonction de placement $\mathbf{f}$ en $\mathbf{p}$. Dans les cas usuels, un développement à l'ordre un est suffisant et permet de construire une théorie linéaire, dite du « premier gradient » ; on suppose alors que la fonction de placement est dérivable pour écrire ainsi que :

$$f_m(\mathbf{q}, t) = f_m(\mathbf{p}, t) + \sum_{n=1}^3 (q_n - p_n) \frac{\partial f_m}{\partial p_n}(\mathbf{p}, t) + o(\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|), \quad 1 \leq m \leq 3$$

pour tout point $\mathbf{q}$ de coordonnées (q_1, q_2, q_3) dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, situé près d'un point $\mathbf{p}$ donné, de coordonnées (p_1, p_2, p_3) dans la même base, comme représenté sur la figure 1.2. On pose alors $d\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ et $d\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, vecteurs élémentaires qui caractérisent les voisinages de $\mathbf{p}$ (à $t = 0$) et $\mathbf{x}$ (à t) respectivement.

Tenseur gradient de la transformation. Le tenseur gradient de la transformation, noté $\mathbb{F}(\mathbf{p}, t)$, est l'application linéaire associée à la matrice jacobienne du placement $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$, comme définie dans l'annexe B.1.1 :

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$$

permettant ainsi de relier les voisinages d'un point dans les configurations initiale et actuelle :

$$d\mathbf{x} = \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}$$

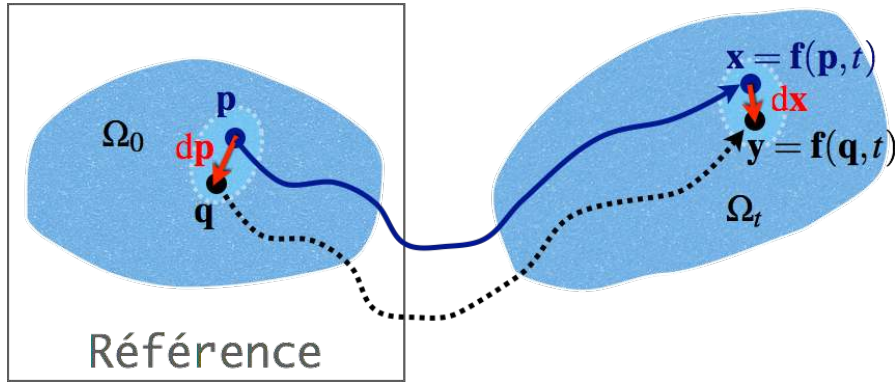


FIGURE 1.2 – Transformation du voisinage d'un point matériel.

et dont les composantes dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ s'expriment comme :

$$F_{mn}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial x_m}{\partial p_n}(\mathbf{p}, t)$$

où (p_1, p_2, p_3) et (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées respectives de $\mathbf{p}$ et de $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ dans cette même base.

L'annexe A.2 donne un aperçu minimal de la manipulation d'un tenseur d'ordre deux, soit sous sa forme matricielle dès lors qu'on l'exprime dans une base, soit sous une forme plus « intrinsèque » à l'aide du produit tensoriel :

$$\mathbb{F} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\partial x_m}{\partial p_n} \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n$$

R Il est également possible d'exprimer le tenseur gradient de la transformation à l'aide du champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{p}, t)$: en effet, comme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + \mathbf{u}(\mathbf{p}, t)$$

on peut établir directement que :

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{I} + \mathbb{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{u}(\mathbf{p}, t)$$

où $\mathbb{I}$ désigne le tenseur identité.

■ **Exemple 1.7 — Allongement uniforme : gradient de la transformation.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.1 :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + a(t) \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

que l'on peut réécrire, en vertu des propriétés du produit tensoriel (présentées dans l'annexe A.2.1), comme :

$$\mathbf{x} = (\mathbb{I} + a(t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

ce qui permet d'exprimer immédiatement le tenseur gradient de la transformation comme :

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{x}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{I} + a(t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

ou, dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)$ comportant le vecteur $\mathbf{n}$:

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)}$$

où $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_3$ sont deux vecteurs unitaires perpendiculaires à $\mathbf{n}$, et entre eux. On retrouve alors effectivement que :

$$F_{mn} = \frac{\partial x_m}{\partial p_n}$$

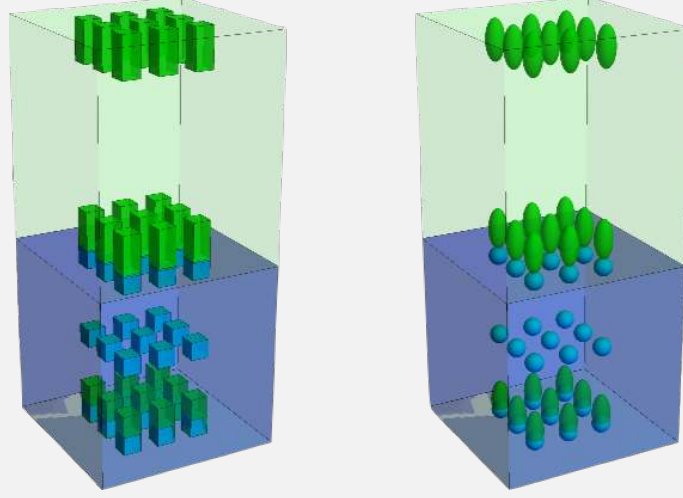
vu que, dans la base considérée, $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2 + a(t)p_2$ et $x_3 = p_3$.

Le voisinage d'un point $\mathbf{p}$, caractérisé par le vecteur élémentaire $d\mathbf{p}$, se transforme donc comme :

$$d\mathbf{x} = (\mathbb{I} + a(t)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})d\mathbf{p} = d\mathbf{p} + a(t)\langle d\mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$$

et ce, quel que soit le point $\mathbf{p}$ considéré. Dans la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)$, on a donc $dx_1 = dp_1$, $dx_2 = (1 + a(t))dp_2$ et $dx_3 = dp_3$.

Ainsi, un cube élémentaire, de centre la particule située initialement en $\mathbf{p}$, et dont l'une des arêtes est selon $\mathbf{n}$, va s'allonger selon cette dernière direction, tandis que les sections perpendiculaires à $\mathbf{n}$ ne vont pas se déformer.



De même, une sphère élémentaire, initialement centrée en $\mathbf{p}$, va se transformer en ellipsoïde, de grand axe selon la direction $\mathbf{n}$. ■

■ **Exemple 1.8 — Glissement uniforme : gradient de la transformation.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.2 :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + b(t)\langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{t}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

que l'on peut réécrire, de façon similaire à l'exemple 1.7, comme :

$$\mathbf{x} = (\mathbb{I} + b(t)\mathbf{t} \otimes \mathbf{n})\mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

ce qui permet d'exprimer immédiatement le tenseur gradient de la transformation comme :

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{x}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{I} + b(t)\mathbf{t} \otimes \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

ou, dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1 = \mathbf{t}, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)$ comportant les vecteurs $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$:

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \begin{pmatrix} 1 & b(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1 = \mathbf{t}, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)}$$

où $\mathbf{i}_3 = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$. On retrouve alors effectivement que :

$$F_{mn} = \frac{\partial x_m}{\partial p_n}$$

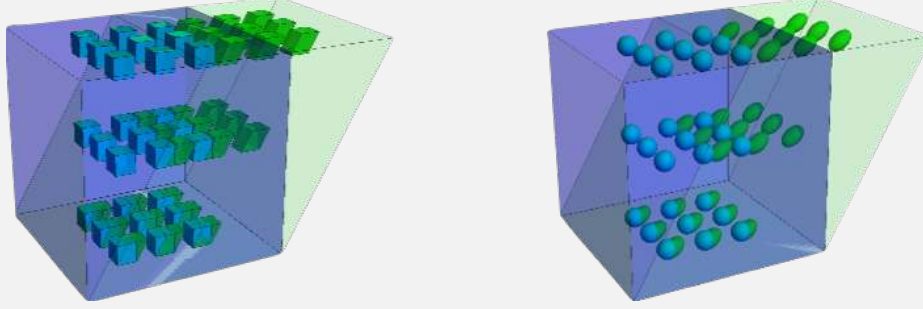
vu que, dans la base considérée, $x_1 = p_1 + b(t)p_2$, $x_2 = p_2$ et $x_3 = p_3$.

Le voisinage d'un point $\mathbf{p}$, caractérisé par le vecteur élémentaire $d\mathbf{p}$, se transforme donc comme :

$$d\mathbf{x} = (\mathbb{I} + b(t)\mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) d\mathbf{p} = d\mathbf{p} + b(t)\langle d\mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{t}$$

et ce, quel que soit le point $\mathbf{p}$ considéré. Dans la base $(\mathbf{i}_1 = \mathbf{t}, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)$, on a donc $dx_1 = dp_1 + b(t)dp_2$, $dx_2 = dp_2$ et $dx_3 = dp_3$.

Ainsi, un cube élémentaire, de centre la particule située initialement en $\mathbf{p}$, et dont une face est d'arêtes selon $\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}$, va se déformer comme un parallélépipède non rectangle.



La même transformation affine s'applique à toute sphère élémentaire initialement centrée en $\mathbf{p}$. ■

■ **Exemple 1.9 — Mouvement de solide indéformable : gradient de la transformation.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.3 :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{x}_A(t) + \mathbb{R}(t)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_A), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

On établit tout de suite que le tenseur gradient de la transformation est :

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{x}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{R}(t)$$

ce qui traduit que le voisinage du point $\mathbf{p}$, caractérisé par le vecteur élémentaire $d\mathbf{p}$, subit une simple rotation :

$$d\mathbf{x} = \mathbb{R}(t) d\mathbf{p}$$

et ne se déforme pas, vu que $\|d\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbb{R}(t) d\mathbf{p}, \mathbb{R}(t) d\mathbf{p} \rangle = \langle \mathbb{R}(t)^T \mathbb{R}(t) d\mathbf{p}, d\mathbf{p} \rangle = \|d\mathbf{p}\|^2$. ■

Expressions tensorielles

On a vu que les composantes du tenseur $\mathbb{F}$ dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ peuvent s'exprimer comme :

$$F_{mn}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial x_m}{\partial p_n}(\mathbf{p}, t)$$

Ceci permet d'obtenir une expression synthétique du tenseur $\mathbb{F}$; en effet, en utilisant l'expression d'un tenseur sur la base des produits tensoriels, donnée dans l'annexe A.2.1, on obtient :

$$\mathbb{F} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 F_{mn} \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\partial x_m}{\partial p_n} \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n$$

que l'on peut transformer comme :

$$\mathbb{F} = \sum_{n=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \frac{\partial x_m}{\partial p_n} \mathbf{i}_m \right) \otimes \mathbf{i}_n = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial p_n} \left(\sum_{m=1}^3 x_m \mathbf{i}_m \right) \otimes \mathbf{i}_n$$

soit finalement l'expression intrinsèque :

$$\mathbb{F} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_n} \otimes \mathbf{i}_n$$

pour laquelle, en pratique, il est possible d'exprimer $\mathbf{x}$ dans une autre base que $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$.

Par ailleurs, s'il est plus commode d'utiliser les coordonnées cylindriques (p_r, p_θ, p_z) pour exprimer le placement des points de Ω , il est possible d'exprimer de façon intrinsèque le tenseur $\mathbb{F}$ dans une base cylindrique $(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)$, en effectuant pour cela une dérivation composée :

$$\mathbb{F} = \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial p_n} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_\theta} \frac{\partial p_\theta}{\partial p_n} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_z} \frac{\partial p_z}{\partial p_n} \right) \otimes \mathbf{i}_n$$

or on peut regrouper :

$$\sum_{n=1}^3 \frac{\partial p_r}{\partial p_n} \mathbf{i}_n = \nabla_{\mathbf{p}} p_r, \quad \sum_{n=1}^3 \frac{\partial p_\theta}{\partial p_n} \mathbf{i}_n = \nabla_{\mathbf{p}} p_\theta, \quad \sum_{n=1}^3 \frac{\partial p_z}{\partial p_n} \mathbf{i}_n = \nabla_{\mathbf{p}} p_z$$

où $\nabla_{\mathbf{p}}$ désigne le gradient dans la configuration initiale. Comme on a établi dans l'annexe B.3.2 que $\nabla_{\mathbf{p}} p_r = \mathbf{i}_r$, $\nabla_{\mathbf{p}} p_\theta = \mathbf{i}_\theta / p_r$ et $\nabla_{\mathbf{p}} p_z = \mathbf{i}_z$, on aboutit finalement à :

$$\mathbb{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_r} \otimes \mathbf{i}_r + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_\theta} \otimes \frac{\mathbf{i}_\theta}{p_r} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_z} \otimes \mathbf{i}_z$$

R La démarche précédente d'expression de $\mathbb{F}$ se généralise bien sûr à un système de coordonnées curvilignes (p_ξ, p_η, p_ζ) quelconque :

$$\mathbb{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_\xi} \otimes \nabla_{\mathbf{p}} p_\xi + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_\eta} \otimes \nabla_{\mathbf{p}} p_\eta + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_\zeta} \otimes \nabla_{\mathbf{p}} p_\zeta$$

où il suffit alors de calculer les gradients de ces coordonnées dans la configuration initiale. Plus de détails peuvent être trouvés dans l'annexe B.3.1.

Résumé 1.1 — Tenseur gradient de la transformation. Le tenseur gradient $\mathbb{F} = \mathbb{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{x}$ permet d'exprimer le vecteur élémentaire $d\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ reliant les deux particules considérées dans la configuration actuelle, en fonction du vecteur correspondant $d\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ dans la configuration initiale :

$$d\mathbf{x}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0, \quad \forall t$$

Dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ associée aux coordonnées (p_1, p_2, p_3) , ce tenseur s'exprime comme :

$$\mathbb{F}(p_1, p_2, p_3, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_1}(p_1, p_2, p_3, t) \otimes \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_2}(p_1, p_2, p_3, t) \otimes \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_3}(p_1, p_2, p_3, t) \otimes \mathbf{i}_3$$

Dans une base cylindrique $(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)$ associée aux coordonnées (p_r, p_θ, p_z) , ce tenseur s'exprime comme :

$$\mathbb{F}(p_r, p_\theta, p_z, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_r}(p_r, p_\theta, p_z, t) \otimes \mathbf{i}_r + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_\theta}(p_r, p_\theta, p_z, t) \otimes \frac{\mathbf{i}_\theta}{p_r} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_z}(p_r, p_\theta, p_z, t) \otimes \mathbf{i}_z$$

■ **Exemple 1.10 — Torsion d'un arbre cylindrique : gradient de la transformation.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.4 :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + p_r(\mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) - \mathbf{i}_r(p_\theta)) = p_r \mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) + p_z \mathbf{i}_z, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

Le gradient de la transformation se calcule alors comme :

$$\mathbb{F}(p_r, p_\theta, p_z, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_r} \otimes \mathbf{i}_r(p_\theta) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_\theta} \otimes \frac{\mathbf{i}_\theta(p_\theta)}{p_r} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_z} \otimes \mathbf{i}_z$$

avec :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_r} &= \mathbf{i}_r \left(p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_\theta} &= p_r \mathbf{i}_\theta \left(p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_z} &= p_r \frac{c(t)}{L} \mathbf{i}_\theta \left(p_\theta + \frac{c(t)p_z}{L} \right) + \mathbf{i}_z\end{aligned}$$

soit finalement :

$$\begin{aligned}\mathbb{F} &= \mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) \otimes \mathbf{i}_r(p_\theta) + \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) \otimes \mathbf{i}_\theta(p_\theta) \\ &\quad + \left(p_r \frac{c(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) + \mathbf{i}_z \right) \otimes \mathbf{i}_z\end{aligned}$$

On note immédiatement l'intérêt d'une expression tensorielle : cette dernière est très compacte, car elle permet de mélanger des vecteurs issus de bases différentes. En effet, si l'on souhaite exprimer la matrice associée, il est nécessaire de choisir une base particulière, ce qui engendre des projections, et donc des termes supplémentaires, par exemple :

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{c(t)p_z}{L}\right) & -\sin\left(\frac{c(t)p_z}{L}\right) & -p_r \frac{c(t)}{L} \sin\left(\frac{c(t)p_z}{L}\right) \\ \sin\left(\frac{c(t)p_z}{L}\right) & \cos\left(\frac{c(t)p_z}{L}\right) & p_r \frac{c(t)}{L} \cos\left(\frac{c(t)p_z}{L}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)}$$

si l'on choisit la base cylindrique $(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)$ associée à la configuration initiale.

En outre, on constate que le tenseur $\mathbb{F}$ obtenu peut s'exprimer comme le produit de deux tenseurs particuliers :

$$\mathbb{F}(p_r, p_\theta, p_z, t) = \mathbb{R}(p_\theta, p_z, t) \mathbb{G}(p_r, p_\theta, p_z, t)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{R}(p_\theta, p_z, t) &= \mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) \otimes \mathbf{i}_r(p_\theta) + \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) \otimes \mathbf{i}_\theta(p_\theta) + \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z \\ \mathbb{G}(p_r, p_\theta, p_z, t) &= \mathbb{I} + p_r \frac{c(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_z\end{aligned}$$

ou encore, dans la base $(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)$ associée à la configuration initiale :

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{c(t)p_z}{L}\right) & -\sin\left(\frac{c(t)p_z}{L}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{c(t)p_z}{L}\right) & \cos\left(\frac{c(t)p_z}{L}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)} \\ \mathbb{G} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{p_r c(t)}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)}\end{aligned}$$

Tandis que $\mathbb{R}$ est le tenseur associé à la rotation d'axe $\mathbf{i}_z$ et d'angle $c(t)p_z/L$, $\mathbb{G}$ est un tenseur caractéristique d'un état de glissement uniforme (comme détaillé dans l'exemple 1.8). Physiquement, le voisinage d'un point $\mathbf{p}$, caractérisé par le vecteur élémentaire $d\mathbf{p}$, subit donc une transformation :

$$d\mathbf{x} = \mathbb{F} d\mathbf{p} = \mathbb{R} \mathbb{G} d\mathbf{p}$$

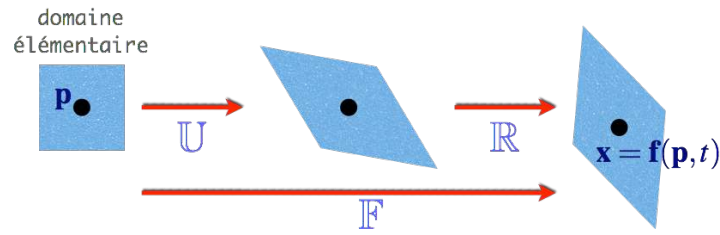
qui est la composition d'un glissement simple et d'une rotation. ■



On peut montrer dans le cas général qu'il est toujours possible de décomposer le tenseur gradient de la transformation comme la composée d'un tenseur $\mathbb{U}$, traduisant comment se déforme le voisinage du point considéré, et d'un tenseur $\mathbb{R}$ associé à une rotation, ce qui permet d'obtenir la « décomposition polaire » de $\mathbb{F}$ comme :

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{R}(\mathbf{p}, t) \mathbb{U}(\mathbf{p}, t), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0, \quad \forall t$$

où $\mathbb{U}$ est la racine carrée du tenseur $\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$, qui est un tenseur symétrique et positif. Plus de précisions sont données dans l'annexe A.2.5, ou dans [BW97; Sal05].



Il est important de noter que cette relation est locale et dépend a priori du point p considéré.

1.2.2 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Maintenant que nous pouvons décrire mathématiquement comment évolue le voisinage d'un point matériel au sein d'un milieu continu, il s'agit de définir la déformation en chaque point d'un tel milieu. On a vu dans les exemples précédents qu'elle pouvait se traduire de deux façons :

- une variation de longueur des segments orientés selon une direction donnée, comme dans l'exemple 1.7 ;
- une variation d'angle (ou « distorsion ») entre des couples de segments orientés selon deux directions données, comme dans l'exemple 1.8 ;

qui peuvent être éventuellement mêlées, comme dans l'exemple 1.10. Pour décrire de manière unifiée toutes ces variations, on introduit le tenseur suivant.

Tenseur des déformations de Green-Lagrange. On appelle tenseur des déformations de Green-Lagrange le tenseur défini en tout point de la configuration initiale du milieu continu Ω comme :

$$\mathbb{E}(p, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{F}(p, t)^T \mathbb{F}(p, t) - \mathbb{I} \right), \quad \forall p \in \Omega_0$$

où $\mathbb{F}(p, t)$ est le tenseur gradient de la transformation, et $\mathbb{I}$ le tenseur identité.

Variation de longueur au voisinage d'un point matériel

On considère le vecteur élémentaire dx reliant deux particules x et y infiniment proches ; comme on l'a vu plus haut, ce vecteur évolue au cours du temps comme :

$$dx = \mathbb{F} dp$$

où dp est le vecteur élémentaire reliant ces deux mêmes particules situées en p et q dans la configuration initiale, comme représenté sur la figure 1.3.

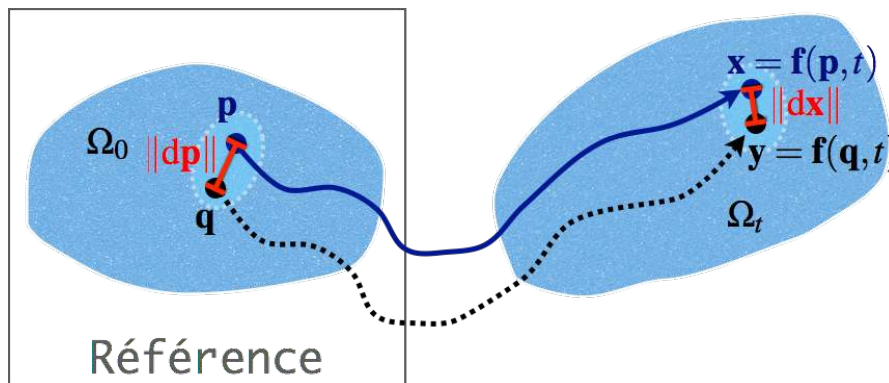


FIGURE 1.3 – Variation de longueur au voisinage d'un point matériel.

On peut alors s'intéresser à la variation au cours du temps de la longueur de ce vecteur élémentaire, ou, de façon équivalente, du carré de cette longueur, qui s'exprime comme :

$$\|\mathbf{dx}\|^2 = \langle \mathbf{dx}, \mathbf{dx} \rangle = \langle \mathbb{F} \mathbf{dp}, \mathbb{F} \mathbf{dp} \rangle = \langle \mathbb{F}^T \mathbb{F} \mathbf{dp}, \mathbf{dp} \rangle$$

en utilisant le transposé du tenseur gradient de la transformation. En comparant avec le carré de la longueur du vecteur élémentaire initial, on obtient alors :

$$\|\mathbf{dx}\|^2 - \|\mathbf{dp}\|^2 = \langle (\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbb{I}) \mathbf{dp}, \mathbf{dp} \rangle$$

soit, en utilisant l'expression du tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\|\mathbf{dx}\|^2 - \|\mathbf{dp}\|^2 = 2 \langle \mathbb{E} \mathbf{dp}, \mathbf{dp} \rangle$$

Si l'on exprime, dans la configuration initiale, le vecteur élémentaire comme $\mathbf{dp} = l_{1p} \mathbf{i}_1$, où $\mathbf{i}_1$ est unitaire, et en posant $l_{1x} = \|\mathbf{dx}\|$, la relation précédente peut se réécrire comme :

$$l_{1x}^2 - l_{1p}^2 = 2l_{1p}^2 \langle \mathbb{E} \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1 \rangle = 2l_{1p}^2 E_{11}$$

en notant E_{mn} les composantes de $\mathbb{E}$ dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$. Les termes diagonaux E_{nn} du tenseur des déformations de Green-Lagrange peuvent donc s'interpréter comme les variations relatives des carrés des longueurs de vecteurs élémentaires de directions respectives $\mathbf{i}_n$, vecteurs de la base cartésienne associée à l'expression des composantes E_{nn} .

R Par définition, comme $l_{1x}^2 > 0$, on voit que $E_{11} > -1/2$. En outre, la relation établie plus haut peut encore se réécrire comme :

$$\frac{l_{1x}}{l_{1p}} = \sqrt{1 + 2E_{11}} = \sqrt{C_{11}} = U_{11} > 0$$

où les termes C_{mn} sont les composantes dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ du tenseur $\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$, appelé tenseur des dilatations, et U est la racine carrée de $\mathbb{C}$, de composantes U_{mn} dans $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, comme définie dans l'annexe A.2.5.

■ **Exemple 1.11 — Allongement uniforme : variations de longueurs.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.1, dont le gradient a été calculé dans l'exemple 1.7 comme :

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{I} + a(t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit alors comme :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{F}(\mathbf{p}, t)^T \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) - \mathbb{I} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{I} + 2a(t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + a(t)^2 (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \mathbb{I} \right)$$

vu que $\mathbb{F}^T = (\mathbb{I} + a(t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})^T = \mathbb{I} + a(t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbb{F}$. Finalement, comme $(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \left(a(t) + \frac{a(t)^2}{2} \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0}$$

ce qui permet de constater que le tenseur des déformations est le même quel que soit le point considéré, d'où le qualificatif d'uniforme pour cette transformation.

Dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)$ comportant le vecteur $\mathbf{n}$, le tenseur $\mathbb{E}$ peut s'écrire comme :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \left(a(t) + \frac{a(t)^2}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)}$$

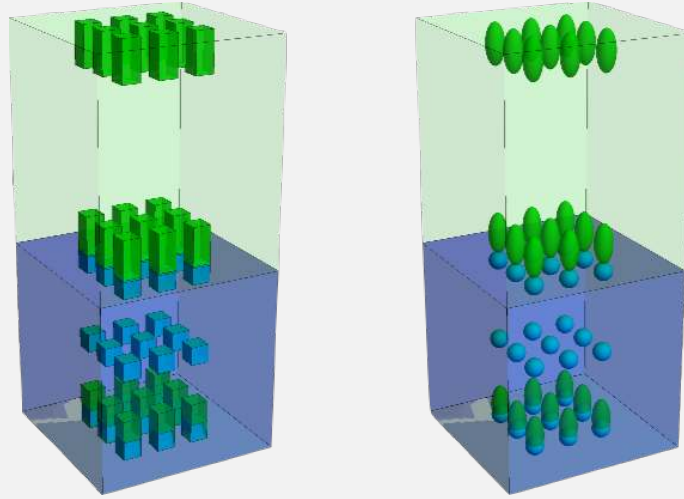
où $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_3$ sont deux vecteurs unitaires perpendiculaires à $\mathbf{n}$, et entre eux. Il est alors facile d'exprimer les variations de longueur de vecteurs élémentaires orientés selon les différentes directions de cette base :

— pour un vecteur élémentaire orienté selon $\mathbf{n} = \mathbf{i}_2$ et de longueur initiale l_{2p} , la longueur actuelle s'exprime

comme $l_{2x} = (1 + a(t))l_{2p}$, soit une variation relative du carré de la longueur :

$$\frac{l_{2x}^2 - l_{2p}^2}{l_{2p}^2} = (1 + a(t))^2 - 1 = 2a(t) + a(t)^2 = 2E_{22}$$

— pour un vecteur élémentaire orienté selon $\mathbf{i}_1$ ou $\mathbf{i}_3$, la longueur reste inchangée, d'où une variation relative nulle du carré de la longueur, ce qui est cohérent avec le fait que $E_{11} = 0 = E_{33}$.
Ces résultats s'observent directement sur les figures ci-dessous.



Variation d'angle au voisinage d'un point matériel

On considère maintenant deux vecteurs élémentaires $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$ reliant respectivement les particules $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}_1$ d'une part, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}_2$ d'autre part, sachant que $\mathbf{y}_1$ et $\mathbf{y}_2$ sont infiniment proches de $\mathbf{x}$; ces deux vecteurs évoluent alors au cours du temps comme :

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbb{F} d\mathbf{p}_1, \text{ et } d\mathbf{x}_2 = \mathbb{F} d\mathbf{p}_2$$

où $d\mathbf{p}_1$ et $d\mathbf{p}_2$ sont les vecteurs élémentaires reliant ces deux mêmes couples de particules dans la configuration initiale, comme représenté sur la figure 1.4.

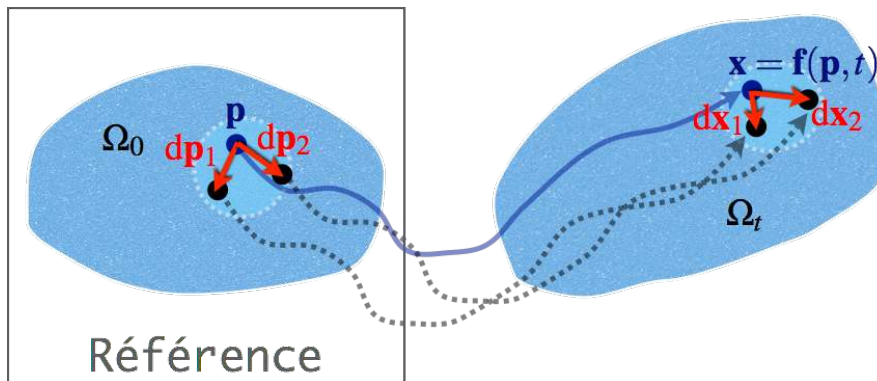


FIGURE 1.4 – Variation d'angle au voisinage d'un point matériel.

On peut alors s'intéresser à la variation au cours du temps de l'angle que font ces deux vecteurs élémentaires, ou, de façon équivalente, à l'évolution du produit scalaire de ces deux vecteurs, qui

s'exprime alors comme :

$$\langle \mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2 \rangle = \langle \mathbb{F} \mathbf{dp}_1, \mathbb{F} \mathbf{dp}_2 \rangle = \langle \mathbb{F}^T \mathbb{F} \mathbf{dp}_1, \mathbf{dp}_2 \rangle$$

En appelant α_{12x} l'angle formé par les deux vecteurs $\mathbf{dx}_1$ et $\mathbf{dx}_2$, et en faisant intervenir l'expression du tenseur des déformations de Green-Lagrange, on obtient finalement :

$$\|\mathbf{dx}_1\| \|\mathbf{dx}_2\| \cos \alpha_{12x} = \langle (2\mathbb{E} + \mathbb{I}) \mathbf{dp}_1, \mathbf{dp}_2 \rangle$$

Si l'on exprime, dans la configuration initiale, les deux vecteurs élémentaires comme $\mathbf{dp}_1 = l_{1p} \mathbf{i}_1$ et $\mathbf{dp}_2 = l_{2p} \mathbf{i}_2$, où $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_2$ sont unitaires, et en posant $l_{1x} = \|\mathbf{dx}_1\| = \|\mathbb{F} \mathbf{dp}_1\|$ et $l_{2x} = \|\mathbf{dx}_2\| = \|\mathbb{F} \mathbf{dp}_2\|$, la relation précédente peut se réécrire comme :

$$l_{1x} l_{2x} \cos \alpha_{12x} = l_{1p} l_{2p} \langle (2\mathbb{E} + \mathbb{I}) \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 \rangle = l_{1p} l_{2p} (2\langle \mathbb{E} \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 \rangle + \cos \alpha_{12p})$$

où α_{12p} désigne l'angle formé par les deux vecteurs $\mathbf{dp}_1$ et $\mathbf{dp}_2$. En prenant comme cas particulier la situation où $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_2$ sont perpendiculaires, et en notant E_{mn} les composantes de $\mathbb{E}$ dans la base cartésienne résultante ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2$), on obtient enfin :

$$\frac{l_{1x}}{l_{1p}} \frac{l_{2x}}{l_{2p}} \cos \alpha_{12x} = 2E_{21}$$

Les termes extradiagonaux E_{mn} ($m \neq n$) du tenseur des déformations de Green-Lagrange sont donc reliés à la variation de l'angle entre deux vecteurs de la base d'expression du tenseur (ou « distorsion ») : en effet, si $E_{mn} = 0$, alors l'angle entre deux vecteurs de directions initiales respectives $\mathbf{i}_m$ et $\mathbf{i}_n$ est encore droit dans la configuration actuelle.

■ **Exemple 1.12 — Allongement uniforme : variations d'angles.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.1, pour laquelle on a calculé dans l'exemple 1.11 le tenseur des déformations de Green-Lagrange comme :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \left(a(t) + \frac{a(t)^2}{2} \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

ou encore, dans une base cartésienne ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3$) :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \left(a(t) + \frac{a(t)^2}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)}$$

Tous les termes extradiagonaux de $\mathbb{E}$ dans cette base étant nuls, les angles initialement droits entre les trois vecteurs de la base restent droits au cours du temps : il n'y a pas de distorsion de la base, comme on le constate sur les figures de l'exemple 1.11.

En revanche, si l'on choisit deux vecteurs orthogonaux non colinéaires aux vecteurs de la base, il peut y avoir distorsion : en effet, avec $\mathbf{dp}_i = \mathbf{n} + \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_1$ et $\mathbf{dp}_j = \mathbf{n} - \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_1$ qui sont bien orthogonaux, on obtient :

$$\|\mathbf{dx}_i\| \|\mathbf{dx}_j\| \cos \alpha_{ij} = \langle (2\mathbb{E} + \mathbb{I}) \mathbf{dp}_i, \mathbf{dp}_j \rangle = 2\langle \mathbb{E} \mathbf{dp}_i, \mathbf{dp}_j \rangle = (2a(t) + a(t)^2) \langle \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_1 \rangle$$

soit, en explicitant :

$$\|\mathbf{dx}_i\|^2 = \langle (2\mathbb{E} + \mathbb{I}) \mathbf{dp}_i, \mathbf{dp}_i \rangle = \langle (1 + 2a(t) + a(t)^2) \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_1 \rangle = 2 + 2a(t) + a(t)^2$$

$$\|\mathbf{dx}_j\|^2 = \langle (2\mathbb{E} + \mathbb{I}) \mathbf{dp}_j, \mathbf{dp}_j \rangle = \langle (1 + 2a(t) + a(t)^2) \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_1 \rangle = 2 + 2a(t) + a(t)^2$$

on établit que :

$$\cos \alpha_{ij} = \frac{2a(t) + a(t)^2}{2 + 2a(t) + a(t)^2}$$

et donc que l'angle α_{ij} évolue au cours du temps. ■

■ **Exemple 1.13 — Glissement uniforme : variations d'angles.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.2, dont le gradient a été calculé dans l'exemple 1.8 comme :

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{I} + b(t)\mathbf{t} \otimes \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit alors comme :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{F}(\mathbf{p}, t)^T \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) - \mathbb{I} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{I} + b(t)\mathbf{t} \otimes \mathbf{n} + b(t)\mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + b(t)^2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{t})(\mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) - \mathbb{I} \right)$$

vu que $\mathbb{F}^T = (\mathbb{I} + b(t)\mathbf{t} \otimes \mathbf{n})^T = \mathbb{I} + b(t)\mathbf{n} \otimes \mathbf{t}$. Finalement, on obtient :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = b(t)\mathbf{t} \otimes_S \mathbf{n} + \frac{b(t)^2}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

en notant $\mathbf{t} \otimes_S \mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{t} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{t})$ la partie symétrique du produit tensoriel $\mathbf{t} \otimes \mathbf{n}$. On constate alors que le tenseur des déformations est le même quel que soit le point considéré, d'où le qualificatif d'uniforme pour cette transformation.

Dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1 = \mathbf{t}, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)$ comportant les vecteurs $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$, le tenseur $\mathbb{E}$ peut s'écrire comme :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \frac{b(t)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & b(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1=\mathbf{t}, \mathbf{i}_2=\mathbf{n}, \mathbf{i}_3)}$$

où $\mathbf{i}_3 = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$. Certains termes extradiagonaux étant non nuls, il y a donc distorsion de la base $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)$. En effet :

$$\|\mathbb{F}\mathbf{t}\| \|\mathbb{F}\mathbf{n}\| \cos \alpha_n = 2 \langle \mathbb{E}\mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = b(t)$$

où α_n est l'angle formé par les deux vecteurs élémentaires initialement orientés selon $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ respectivement. En explicitant les variations de longueurs de ces deux vecteurs élémentaires :

$$\|\mathbb{F}\mathbf{t}\|^2 = \langle (2\mathbb{E} + \mathbb{I})\mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$$

$$\|\mathbb{F}\mathbf{n}\|^2 = \langle (2\mathbb{E} + \mathbb{I})\mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = (1 + b(t)^2) \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1 + b(t)^2$$

on établit finalement que :

$$\cos \alpha_n = \frac{b(t)}{\sqrt{1 + b(t)^2}}$$

En revanche, comme $\langle \mathbb{E}\mathbf{t}, \mathbf{i}_3 \rangle = 0 = \langle \mathbb{E}\mathbf{n}, \mathbf{i}_3 \rangle$, on établit que les directions initialement orientées comme $\mathbf{t}$ et $\mathbf{i}_3$ d'une part, et comme $\mathbf{n}$ et $\mathbf{i}_3$ d'autre part, restent perpendiculaires à tout instant. ■

Interprétation

Compte tenu des résultats des paragraphes précédents, on peut donc établir que le tenseur $\mathbb{E}$ des déformations de Green-Lagrange permet de traduire les deux façons que présente un milieu continu tridimensionnel pour se déformer :

- une variation de longueur des segments orientés selon une direction donnée ;
- une variation d'angle (ou distorsion) entre des couples de segments orientés selon deux directions données.

Comme le tenseur $\mathbb{E}$ est symétrique par définition ($\mathbb{E}^T = \mathbb{E}$), seules six des neuf composantes de ce tenseur dans une base donnée sont indépendantes :

- trois termes diagonaux, qui correspondent chacun à la variation du carré de la longueur des segments orientés initialement selon les trois vecteurs de la base utilisée pour exprimer les composantes ;
- trois termes extradiagonaux (supérieurs par exemple), qui correspondent chacun à la variation des angles initialement droits entre chaque couple de vecteurs de la base utilisée.

Bien sûr, dans le cas général, ces six composantes peuvent dépendre du point $\mathbf{p}$ considéré dans la configuration initiale.

■ **Exemple 1.14 — Mouvement de solide indéformable : tenseur des déformations de Green-Lagrange.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.3 comme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{x}_A(t) + \mathbb{R}(t)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_A), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où $\mathbf{x}_A(t)$ est le placement d'un point A donné de Ω , et $\mathbb{R}(t)$ est un tenseur de rotation. Le tenseur gradient de la transformation s'exprime alors directement comme :

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{x}(\mathbf{p}, t) = \mathbb{R}(t), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

et le tenseur des déformations de Green-Lagrange vaut alors :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{R}(t)^T \mathbb{R}(t) - \mathbb{I} \right) = \mathbb{0}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

compte tenu de la propriété d'orthogonalité de $\mathbb{R}$.

On traduit donc rigoureusement le fait que le solide est indéformable : le tenseur $\mathbb{E}$ étant nul en tout point, il n'y a aucune variation de longueur ou d'angle au sein de son domaine. ■

■ **Exemple 1.15 — Torsion d'un arbre cylindrique : interprétation des composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.4, dont le gradient a été calculé dans l'exemple 1.10 comme :

$$\begin{aligned} \mathbb{F} = & \mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) \otimes \mathbf{i}_r(p_\theta) + \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) \otimes \mathbf{i}_\theta(p_\theta) \\ & + \left(p_r \frac{c(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) + \mathbf{i}_z \right) \otimes \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

Comme sa transposée peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^T = & \mathbf{i}_r(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) + \mathbf{i}_\theta(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) \\ & + \mathbf{i}_z \otimes \left(p_r \frac{c(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) + \mathbf{i}_z \right) \end{aligned}$$

le tenseur des dilatations $\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$ est tel que :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & \langle \mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L), \mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) \rangle \mathbf{i}_r(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_r(p_\theta) \\ & + \langle \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L), \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) \rangle \mathbf{i}_\theta(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(p_\theta) \\ & + \left\langle p_r \frac{c(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) + \mathbf{i}_z, p_r \frac{c(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) + \mathbf{i}_z \right\rangle \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z \\ & + \langle \mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L), \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) \rangle (\mathbf{i}_r(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(p_\theta) + \mathbf{i}_\theta(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_r(p_\theta)) \\ & + \left\langle \mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L), p_r \frac{c(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) + \mathbf{i}_z \right\rangle (\mathbf{i}_r(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_z + \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_r(p_\theta)) \\ & + \left\langle \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L), p_r \frac{c(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(p_\theta + c(t)p_z/L) + \mathbf{i}_z \right\rangle (\mathbf{i}_\theta(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_z + \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_\theta(p_\theta)) \\ = & \mathbf{i}_r(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_r(p_\theta) + \mathbf{i}_\theta(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(p_\theta) + \left(1 + \left(p_r \frac{c(t)}{L} \right)^2 \right) \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z \\ & + p_r \frac{c(t)}{L} (\mathbf{i}_\theta(p_\theta) \otimes \mathbf{i}_z + \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_\theta(p_\theta)) \end{aligned}$$

ce qui entraîne que le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit simplement comme :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = p_r \frac{c(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(p_\theta) \otimes_S \mathbf{i}_z + \frac{p_r^2 c(t)^2}{2L^2} \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

en notant $\mathbf{a} \otimes_S \mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})/2$ la partie symétrique du produit tensoriel $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, soit, dans la base $(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)$:

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \frac{p_r c(t)}{2L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & p_r \frac{c(t)}{L} \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)}$$

ce qui correspond au cas du glissement étudié dans l'exemple 1.13, à la différence près qu'ici, l'expression du tenseur $\mathbb{E}$ dépend du point considéré.

On peut alors exprimer les variations d'angle comme dans le cas de l'exemple 1.13, avec $b(t) = p_r c(t)/L$, pour obtenir que :

$$\cos \alpha_{\theta z} = \frac{p_r c(t)}{L \sqrt{1 + p_r^2 c(t)^2 / L^2}}$$

où $\alpha_{\theta z}$ est l'angle formé dans la configuration actuelle par les vecteurs de directions initiales $\mathbf{i}_\theta$ et $\mathbf{i}_z$.

En outre, on obtient comme variations de longueur pour des vecteurs élémentaires orientés selon les différentes directions de la base cylindrique :

- pour un vecteur élémentaire initialement radial ou orthoradial, on n'observe aucune variation de longueur car chaque section subit une rotation de solide indéformable, ce qui est cohérent avec $E_{rr} = 0 = E_{\theta\theta}$;
- pour un vecteur élémentaire parallèle à l'axe de l'arbre, et de longueur initiale l_{zp} , le théorème de Pythagore permet d'écrire que sa longueur actuelle vérifie $l_{zx}^2 = l_{zp}^2 + (c(t)p_r l_{zp}/L)^2$, ce qui correspond à une variation :

$$\frac{l_{zx}^2 - l_{zp}^2}{l_{zp}^2} = \left(\frac{c(t)}{L} p_r \right)^2 = 2E_{zz}$$

On vérifie également dans ce triangle rectangle que $\cos \alpha_{\theta z} = \frac{p_r c(t)}{L \sqrt{1 + p_r^2 c(t)^2 / L^2}}$. ■

Les résultats précédents permettent de conclure que si l'on connaît en tout point $\mathbf{p}$:

- les allongements selon trois directions indépendantes dans la configuration initiale ;
- les variations d'angles de trois couples indépendants de directions orthogonales dans la configuration initiale ;

alors on peut déterminer en ce point l'allongement selon n'importe quelle direction et les variations d'angle de n'importe quel couple de directions.

Résumé 1.2 — Tenseur des déformations de Green-Lagrange. La déformation d'un milieu continu en tout point de la configuration initiale se détermine par l'intermédiaire du tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{F}(\mathbf{p}, t)^T \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) - \mathbb{I} \right), \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

qui est un tenseur symétrique.

La variation du carré de la longueur dans la configuration actuelle d'un vecteur infinitésimal initialement égal à $d\mathbf{p} = \|d\mathbf{p}\| \mathbf{e}_p$ (avec $\mathbf{e}_p$ unitaire) s'exprime alors comme :

$$\frac{\|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{p}\|^2}{\|d\mathbf{p}\|^2} = 2 \langle \mathbb{E} \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_p \rangle$$

où $d\mathbf{x} = \mathbb{F} d\mathbf{p}$ est la transformée du vecteur $d\mathbf{p}$ dans la configuration actuelle.

L'angle α_{12x} dans la configuration actuelle entre deux vecteurs infinitésimaux initialement égaux à $d\mathbf{p}_1 = \|d\mathbf{p}_1\| \mathbf{e}_{p1}$ et $d\mathbf{p}_2 = \|d\mathbf{p}_2\| \mathbf{e}_{p2}$ (avec $\mathbf{e}_{p1}$ et $\mathbf{e}_{p2}$ unitaires) se détermine alors

comme :

$$\cos \alpha_{12x} = \frac{\langle \mathbb{F}\mathbf{e}_{p1}, \mathbb{F}\mathbf{e}_{p2} \rangle}{\|\mathbb{F}\mathbf{e}_{p1}\| \|\mathbb{F}\mathbf{e}_{p2}\|} = \frac{\cos \alpha_{12p} + 2\langle \mathbb{E}\mathbf{e}_{p1}, \mathbf{e}_{p2} \rangle}{\sqrt{\langle (2\mathbb{E} + \mathbb{I})\mathbf{e}_{p1}, \mathbf{e}_{p1} \rangle \langle (2\mathbb{E} + \mathbb{I})\mathbf{e}_{p2}, \mathbf{e}_{p2} \rangle}}$$

sachant que l'angle initial α_{12p} vérifie $\cos \alpha_{12p} = \langle \mathbf{e}_{p1}, \mathbf{e}_{p2} \rangle$.



Comme précédemment, il est également possible de faire intervenir le champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{p}, t)$ du domaine considéré. On avait établi que :

$$\mathbb{F} = \mathbb{I} + \mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u}$$

Ceci permet alors d'exprimer facilement le tenseur des déformations de Green-Lagrange comme :

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u})^T + (\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u})^T \mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u})$$

On constate alors que ce tenseur dépend de façon non linéaire du champ de déplacement.

Compte tenu de la définition du tenseur $\mathbb{E}$, les différentes composantes de ce dernier sont des nombres sans dimension. Les ordres de grandeur typiques que l'on peut rencontrer avant rupture pour plusieurs matériaux classiques sont présentés dans le tableau 1.1. En pratique, on constate que, sauf pour certaines classes de matériaux comme les élastomères (famille à laquelle appartient le caoutchouc), les déformations restent très petites (souvent de l'ordre de quelques pourcents) : il est donc possible de s'intéresser à une expression approchée de ces déformations, développée dans ce qui suit.

Matériaux	Ordres de grandeur
Acier (déformations réversibles)	10^{-4} à 10^{-2} (0,01 % à 1 %)
Acier (déformations irréversibles)	10^{-2} à 10^{-1} (1 % à 10 %)
Béton	10^{-3} (0,1 %)
Sol	10^{-2} (1 %)
Caoutchouc	supérieur à 1 (100 %)

TABLEAU 1.1 – Valeurs typiques des déformations admissibles pour différents matériaux.

1.3 Tenseur des petites déformations

La plupart des solides déformables qui sont utilisés dans l'industrie ou la construction pour supporter ou transmettre des charges doivent généralement se déformer peu pour éviter la rupture. Cette constatation permet alors d'introduire un cadre de description linéarisé qui simplifie les expressions obtenues dans les paragraphes précédents, et que nous utiliserons dans toute la suite de ce polycopié.

1.3.1 Hypothèse des petites perturbations

Le cadre dit de « l'hypothèse des petites perturbations » (HPP) repose en fait sur deux hypothèses distinctes, mais complémentaires :

1. une hypothèse de petite transformation, garantissant que l'on peut confondre les deux configurations, initiale et actuelle :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + \mathbf{u}(\mathbf{p}, t) \approx \mathbf{p}, \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

hypothèse équivalente à supposer que le déplacement en tout point est très petit par rapport à la dimension caractéristique $\mathcal{L}$ du domaine considéré :

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{p}, t)\| \ll \mathcal{L}, \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

2. une hypothèse de petite déformation, équivalente à supposer que la norme du gradient du champ de déplacement en tout point est très petite :

$$\|\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{p}, t)\| \ll 1, \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

où l'on utilise la norme tensorielle $\|\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u}\|^2 = \text{tr}((\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u})^T \mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u})$ comme explicité dans l'annexe A.2.2; ceci permet ainsi de linéariser l'expression du tenseur des déformations de Green-Lagrange en fonction du champ de déplacement :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2}(\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u})^T + (\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u})^T \mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u}) \approx \frac{1}{2}(\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u})^T)$$

R L'hypothèse précédente permet également de confondre les expressions des gradients dans les configurations initiale et actuelle; en effet, pour tout champ vectoriel $\mathbf{w}_p(\mathbf{p}, t)$ dans la configuration initiale, qui se transforme comme $\mathbf{w}_x(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}_x(\mathbf{f}(\mathbf{p}, t), t) = \mathbf{w}_p(\mathbf{p}, t)$ dans la configuration actuelle, une dérivation composée permet d'établir que :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{w}_p = (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}_x)\mathbb{F} = \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}_x(\mathbb{I} + \mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u}) \approx \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}_x$$

quand on suppose que $\|\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{p}, t)\| \ll 1$.

Compte tenu de l'hypothèse des petites perturbations, dans toute la suite, on choisit arbitrairement de conserver la notation $\mathbf{x}$ pour désigner le placement d'une particule, quelle que soit la configuration considérée.

1.3.2 Définition et propriétés

On introduit, dans le cadre « HPP », une nouvelle description des déformations du milieu considéré.

Tenseur des petites déformations. Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, on appelle tenseur des petites déformations la partie symétrique du gradient du champ de déplacement :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T), \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t$$

où l'on a confondu les configurations initiale et actuelle en une seule notée Ω .

Ce tenseur correspond à la linéarisation du tenseur des déformations de Green-Lagrange lorsque l'on suppose que le gradient du champ de déplacement est « suffisamment » petit; en effet, comme évoqué plus haut, cela revient à écrire en pratique que :

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2}(\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u})^T + (\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u})^T \mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u}) \approx \frac{1}{2}(\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^T)$$

avec $\mathbf{x} \approx \mathbf{p}$.

■ **Exemple 1.16 — Torsion d'un arbre cylindrique : tenseur des petites déformations.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.4, pour laquelle le champ de déplacement s'écrit comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}, t) = p_r(\mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) - \mathbf{i}_r(p_\theta)), \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

Comme défini plus haut, l'hypothèse des petites perturbations consiste à supposer :

1. que $\|\mathbf{u}(\mathbf{p}, t)\| \ll \min(R, L)$, $\forall \mathbf{p} \in \Omega_0$, ce qui revient à considérer que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = rz c(t)/L \mathbf{i}_\theta(\theta)$, quand on suppose $|c(t)| \ll 1$, $\forall t$, et dans le cas courant où $R < L$;

2. que $\|\mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{p}, t)\| = \|\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) - \mathbb{I}\| \ll 1$, ce qui revient ici à supposer que $R|c(t)| \ll L$, $\forall t$. Ces deux hypothèses ne sont pas nécessairement équivalentes : en effet, dans le cas d'un cylindre très élancé ($R \ll L$), il est possible d'avoir $R|c(t)| \ll L$ sans que $|c(t)|$ soit petit.

Dans ce cadre, on peut exprimer le tenseur des petites déformations comme la partie symétrique du gradient du déplacement (exprimé avec le système de coordonnées actuelles) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^T)$$

où le gradient est égal à :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{i}_r(\theta) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}(\mathbf{x}, t) \otimes \frac{\mathbf{i}_\theta(\theta)}{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{i}_z \\ &= \frac{zc(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{i}_r(\theta) - \frac{zc(t)}{L} \mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(\theta) + \frac{rc(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

d'où, finalement :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{rc(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes_S \mathbf{i}_z$$

On peut retrouver ce résultat en linéarisant le tenseur des déformations de Green-Lagrange (déterminé dans l'exemple 1.15), lorsque l'on suppose que $R|c(t)| \ll L$, $\forall t$:

$$\mathbb{E}(\mathbf{p}, t) = p_r \frac{c(t)}{L} \left(\mathbf{i}_\theta(p_\theta) \otimes_S \mathbf{i}_z + \frac{prc(t)}{2L} \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z \right) \approx p_r \frac{c(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(p_\theta) \otimes_S \mathbf{i}_z$$

et en confondant les deux configurations lorsque l'on suppose que $|c(t)| \ll 1$, $\forall t$. ■



Il est bien sûr fondamental d'être dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations pour que l'utilisation du tenseur des petites déformations soit licite pour décrire la déformation du milieu.

Ainsi, si l'on reprend le cas du mouvement d'un solide indéformable, on avait déterminé dans l'exemple 1.14 que le tenseur $\mathbb{E}$ des déformations de Green-Lagrange était nul. Par conséquent, on peut écrire que le tenseur des petites déformations vaut :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^T) = \mathbb{E} - \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^T \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = -\frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^T \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}$$

avec $\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = \mathbb{F} - \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{I}$ dans le cas considéré (exemple 1.14), où $\mathbb{R}$ est une matrice de rotation, qui vérifie la propriété d'orthogonalité : $\mathbb{R}^T \mathbb{R} = \mathbb{I}$ (comme détaillé dans l'annexe A.2.6). On trouve ainsi que :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2} (\mathbb{R} - \mathbb{I})^T (\mathbb{R} - \mathbb{I}) = \frac{1}{2} (\mathbb{R} + \mathbb{R}^T - 2\mathbb{I})$$

qui n'est pas nul dans le cas général d'une rotation arbitraire, ce qui est logique, vu qu'il n'est en général pas possible de confondre les configurations initiale et actuelle.

Le tenseur des petites déformations ne s'annule alors que si $\mathbb{R} + \mathbb{R}^T = 2\mathbb{I}$, ce qui est le cas si la rotation peut s'écrire comme :

$$\mathbb{R} = \mathbb{I} + \boldsymbol{\tau}, \text{ avec } \boldsymbol{\tau}^T = -\boldsymbol{\tau}$$

qui correspond en fait, comme détaillé dans l'annexe A.2.6, à une « petite » rotation d'angle $\varphi = \|\mathbf{r}\|$ et de direction $\mathbf{e} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$, où $\mathbf{r}$ est le vecteur associé au tenseur antisymétrique $\boldsymbol{\tau}$ (voir l'annexe A.2.1) ; ceci confirme alors que le tenseur des petites déformations est capable de traduire l'indéformabilité du solide, à condition d'être effectivement dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

Expressions tensorielles

L'expression tensorielle du tenseur des petites déformations se déduit directement de celle obtenue pour le tenseur gradient du champ de déplacement, qui, formellement, est très semblable à celle établie pour le tenseur gradient de la transformation.

Dans le cas d'une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, on peut écrire ce tenseur gradient, en tout point $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$, comme :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} \otimes \mathbf{i}_n$$

d'où, pour le tenseur des petites déformations :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} \otimes_S \mathbf{i}_n = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} \otimes \mathbf{i}_n + \mathbf{i}_n \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} \right)$$

soit, sous forme matricielle dans cette même base :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)}$$

en posant $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i}_1 + u_2\mathbf{i}_2 + u_3\mathbf{i}_3$.

Par ailleurs, il est possible d'obtenir pour un autre jeu de coordonnées une expression tensorielle similaire ; dans le cas de coordonnées cylindriques (r, θ, z) associées à la base $(\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_z)$, on obtient, comme dans le cas du tenseur gradient de la transformation précédemment :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \otimes \mathbf{i}_r + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} \otimes \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \otimes \mathbf{i}_z$$

ce qui permet d'écrire pour le tenseur des petites déformations :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \otimes_S \mathbf{i}_r + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} \otimes_S \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \otimes_S \mathbf{i}_z$$

Le calcul du tenseur à l'aide de cette expression doit prendre en compte le fait que deux des trois vecteurs de base dépendent de l'angle θ , et que les dérivées de ces derniers doivent intervenir dans le terme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \mathbf{i}_r + u_r \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + u_\theta \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \mathbf{i}_z$$

en posant $\mathbf{u} = u_r\mathbf{i}_r + u_\theta\mathbf{i}_\theta + u_z\mathbf{i}_z$. Vu que :

$$\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta}(\theta) = \mathbf{i}_\theta(\theta), \text{ et } \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta}(\theta) = -\mathbf{i}_r(\theta)$$

on obtient finalement l'expression matricielle suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_z)}$$

Interprétation

Comme pour le tenseur des déformations de Green-Lagrange, le tenseur des petites déformations est symétrique, et donc seules six des neuf composantes de ce dernier sont indépendantes dans une base donnée.

Pour ce qui concerne les termes diagonaux, on voit que, en partant de l'interprétation définie plus haut pour le tenseur des déformations de Green-Lagrange, on peut établir que, pour un vecteur élémentaire $l_0 \mathbf{e}$, avec $l_0 \ll 1$ et $\mathbf{e}$ unitaire, et qui voit sa longueur varier de Δl :

$$2\langle \mathbb{E}\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{(l_0 + \Delta l)^2 - l_0^2}{l_0^2} \approx 2 \frac{\Delta l}{l_0} = 2\langle \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$$

à l'ordre un en Δl , en supposant, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, que $\Delta l \ll l_0$.

De façon similaire, on peut écrire pour les termes extradiagonaux, avec des vecteurs élémentaires $l_{10}\mathbf{e}_1$ et $l_{20}\mathbf{e}_2$ (où $l_{10} \ll 1$, $l_{20} \ll 1$, et $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ unitaires et perpendiculaires entre eux) que :

$$2\langle \mathbb{E}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = \frac{l_1 l_2}{l_{10} l_{20}} \cos \alpha_{12} = \frac{(l_{10} + \Delta l_1)(l_{20} + \Delta l_2)}{l_{10} l_{20}} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Delta \alpha_{12} \right) \approx \Delta \alpha_{12}$$

à l'ordre zéro en $\Delta l_1 \ll l_{10}$ et $\Delta l_2 \ll l_{20}$, et à l'ordre un en $\Delta \alpha_{12}$, qui représente la distorsion, c'est-à-dire la variation d'angle par rapport à l'angle initial qui est droit, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations ($\Delta \alpha_{12} \ll 1$).

■ **Exemple 1.17 — Allongement uniforme : tenseur des petites déformations.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.1, pour laquelle on peut exprimer le déplacement comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}, t) = a(t) \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} = a(t) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

Dans le cas où $|a(t)| \ll 1$, $\forall t$, on peut supposer que $\mathbf{p} \approx \mathbf{x}$ et se placer dans le cadre « HPP », en calculant ainsi le tenseur des petites déformations comme la partie symétrique du gradient du champ de déplacement. Celui-ci s'exprime comme :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = a(t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

ce qui permet effectivement de vérifier que $\|\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| \ll 1$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Comme ce gradient est symétrique, on obtient finalement :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = a(t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

ce qui correspond bien à l'expression approchée, à l'ordre un en $a(t)$, du tenseur des déformations de Green-Lagrange obtenu dans l'exemple 1.11 :

$$\mathbb{E} = \left(a(t) + \frac{a(t)^2}{2} \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \approx a(t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

Dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)$ comportant le vecteur $\mathbf{n}$, le tenseur des petites déformations peut s'écrire comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)}$$

où $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_3$ sont deux vecteurs unitaires perpendiculaires à $\mathbf{n}$, et entre eux. Il est alors facile d'exprimer les variations de longueur de vecteurs élémentaires orientés selon les différentes directions de cette base :

— pour un vecteur élémentaire orienté selon $\mathbf{n} = \mathbf{i}_2$ et de longueur initiale l_0 , la longueur actuelle s'exprime comme $l = (1 + a(t))l_0$, soit une variation de longueur Δl vérifiant :

$$\frac{\Delta l}{l_0} = a(t) = \varepsilon_{22}(t)$$

— pour un vecteur élémentaire orienté selon $\mathbf{i}_1$ ou $\mathbf{i}_3$, la longueur actuelle reste inchangée, d'où une variation de longueur nulle, ce qui est cohérent avec le fait que $\varepsilon_{11} = 0 = \varepsilon_{33}$.

■

■ **Exemple 1.18 — Glissement uniforme : tenseur des petites déformations.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.2, pour laquelle on peut exprimer le déplacement comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}, t) = b(t) \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{t} = b(t) (\mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

Dans le cas où $|b(t)| \ll 1$, $\forall t$, on peut supposer que $\mathbf{p} \approx \mathbf{x}$ et se placer dans le cadre « HPP ». Le gradient du champ de déplacement s'écrit alors comme :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = b(t) \mathbf{t} \otimes \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

et on obtient finalement le tenseur des petites déformations comme la partie symétrique de ce gradient :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = b(t) \mathbf{t} \otimes_S \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

ce qui correspond bien à l'expression approchée, à l'ordre un en $b(t)$, du tenseur des déformations de Green-Lagrange obtenu dans l'exemple 1.13 :

$$\mathbb{E} = b(t) \mathbf{t} \otimes_S \mathbf{n} + \frac{b(t)^2}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \approx b(t) \mathbf{t} \otimes_S \mathbf{n}$$

Dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1 = \mathbf{t}, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)$ comportant les vecteurs $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$, le tenseur des petites déformations peut s'écrire comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{b(t)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1=\mathbf{t}, \mathbf{i}_2=\mathbf{n}, \mathbf{i}_3)}$$

où $\mathbf{i}_3 = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$. Tous les termes diagonaux étant nuls, on peut donc en déduire qu'il n'y a aucune variation de longueur (dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations).

En revanche, certains termes extradiagonaux étant non nuls, il y a donc distorsion de la base $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)$. En effet :

$$b(t) = 2 \langle \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \approx \cos \left(\frac{\pi}{2} - \Delta \alpha_{tn} \right) \approx \Delta \alpha_{tn}$$

où $\Delta \alpha_{tn} \ll 1$ est la variation de l'angle initialement droit, formé par les deux vecteurs élémentaires initialement orientés selon $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ respectivement.

À l'inverse, comme $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{t}, \mathbf{i}_3 \rangle = 0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}, \mathbf{i}_3 \rangle$, on établit que les directions initialement orientées comme $\mathbf{t}$ et $\mathbf{i}_3$ d'une part, et comme $\mathbf{n}$ et $\mathbf{i}_3$ d'autre part, restent perpendiculaires à tout instant. ■

Résumé 1.3 — Tenseur des petites déformations. Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, le tenseur des petites déformations correspond à la partie symétrique du tenseur gradient du champ de déplacement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right)$$

Dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, de coordonnées associées (x_1, x_2, x_3) , ce tenseur peut s'exprimer comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \otimes_S \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \otimes_S \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \otimes_S \mathbf{i}_3$$

où, par définition, $\mathbf{a} \otimes_S \mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})/2$.

Dans une base cylindrique $(\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_z)$, de coordonnées associées (r, θ, z) , ce tenseur peut s'exprimer comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(r, \theta, z) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r}(r, \theta, z) \otimes_S \mathbf{i}_r(\theta) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}(r, \theta, z) \otimes_S \frac{\mathbf{i}_\theta(\theta)}{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(r, \theta, z) \otimes_S \mathbf{i}_z$$

La variation de longueur Δl d'un vecteur infinitésimal de longueur l_0 et de direction $\mathbf{e}$ peut

s'exprimer comme :

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$$

La variation d'angle $\Delta\alpha_{12}$ entre deux vecteurs infinitésimaux de longueurs respectives l_{10} et l_{20} , et de directions $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ orthogonales entre elles, vérifie :

$$\frac{\Delta\alpha_{12}}{2} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle$$

■ **Exemple 1.19 — Expansion radiale d'un cylindre.** On considère un cylindre de révolution d'axe $\mathbf{i}_z$, dont le rayon augmente au cours du temps ; en choisissant la base cylindrique $(\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_z)$ associée, le déplacement d'un point de coordonnées (r, θ, z) du cylindre peut alors s'écrire, à chaque instant, comme :

$$\mathbf{u}(r, \theta, z, t) = u_r(r, t) \mathbf{i}_r(\theta)$$

où l'on suppose que le déplacement radial u_r est invariant par rotation autour de l'axe du cylindre, et ne dépend pas de l'altitude du point selon l'axe.

Le tenseur des petites déformations s'obtient alors à l'aide de l'expression intrinsèque que l'on a établie plus haut en coordonnées cylindriques :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \otimes_S \mathbf{i}_r + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} \otimes_S \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \otimes_S \mathbf{i}_z$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} &= u'_r \mathbf{i}_r \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} &= u_r \mathbf{i}_\theta \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

avec $\bullet' = \frac{\partial \bullet}{\partial r}$, ce qui permet d'obtenir que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(r, \theta, z) = u'_r(r, t) \mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_r(\theta) + \frac{u_r(r, t)}{r} \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(\theta)$$

Cet exemple illustre les effets de courbure qui jouent un rôle extrêmement important dans l'étude mécanique des structures ; en effet, la géométrie cylindrique du domaine lie les dimensions radiale et circonférentielle puisque, si le rayon du cylindre croît, sa circonférence augmente également. C'est ce que traduit le tenseur des petites déformations, qui permet de trouver localement que :

$$\frac{\Delta l_\theta}{l_{\theta 0}} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$$

pour tout segment élémentaire de direction $\mathbf{i}_\theta$ et de longueur $l_{\theta 0}$. ■



L'exemple précédent montre qu'il est capital de prendre garde au fait que, même si le déplacement considéré est invariant par rotation autour de l'axe du cylindre, le tenseur des petites déformations présente une composante circonférentielle ; en effet, la circonférence du cylindre ne peut qu'évoluer si le rayon du cylindre est modifié.

1.3.3 Étude des petites perturbations locales

On illustre ici différents aspects liés à l'analyse et la mesure des déformations, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

Transformation du voisinage d'un point

On a défini dans le paragraphe 1.2.1 le tenseur gradient de la transformation, qui permet de caractériser la transformation du voisinage d'un point, en précisant l'évolution au cours du temps

d'un vecteur élémentaire $d\mathbf{p}$ donné dans la configuration initiale :

$$d\mathbf{x} = \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p} = (\mathbb{I} + \mathbb{D}_{\mathbf{p}}\mathbf{u}(\mathbf{p}, t)) d\mathbf{p}, \forall \mathbf{p} \in \Omega_0, \forall t$$

et on a vu comment l'exprimer à l'aide du tenseur gradient du déplacement. Dans le cadre HPP, il est alors possible de confondre les configurations initiale et actuelle, et, en choisissant $\mathbf{x}$ comme variable d'espace, d'écrire tout simplement que :

$$d\mathbf{x} = (\mathbb{I} + \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{p} = (\mathbb{I} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{r}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{p}, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t$$

où $\mathbb{r}$ est la partie antisymétrique du tenseur gradient du déplacement, défini comme :

$$\mathbb{r}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T \right), \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t$$

On peut alors montrer que l'on peut associer à ce tenseur antisymétrique un vecteur $\mathbf{r}$ tel que, pour tout vecteur arbitraire $\mathbf{c}$, on a :

$$\mathbb{r}(\mathbf{x}, t)\mathbf{c} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{c}, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t$$

(voir l'annexe A.2.1 pour plus de précisions), et que le tenseur $\mathbb{I} + \mathbb{r}$ correspond en fait à une « petite » rotation d'angle $\varphi = \|\mathbf{r}\|$ et de direction $\mathbf{e} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$, comme détaillé dans l'annexe A.2.6.

Ainsi, le voisinage d'un point, subit, dans le cadre HPP, une transformation qui peut se décomposer comme la somme d'une déformation pure, représentée par le tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, et d'une (petite) rotation de solide indéformable, représentée par le tenseur $\mathbb{I} + \mathbb{r}$.

R Ce résultat peut aussi s'obtenir à partir de la décomposition polaire du tenseur gradient de la transformation, que l'on avait citée en remarque à la fin du paragraphe 1.2.1 :

$$\mathbb{F} = \mathbb{R}\mathbb{U}$$

où $\mathbb{R}$ est un tenseur de rotation, et $\mathbb{U}$ est la racine carrée du tenseur des dilatations $\mathbb{C} = \mathbb{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}$, qui est symétrique. En effet, en se plaçant dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, on peut approximer la rotation comme :

$$\mathbb{R} \approx \mathbb{I} + \mathbb{r}, \text{ avec } \mathbb{r}^T = -\mathbb{r}$$

compte tenu de ce qui est décrit dans l'annexe A.2.6, et la racine carrée, à l'aide d'un développement limité analogue à ce que l'on peut écrire sur des fonctions scalaires :

$$\mathbb{U} = (\mathbb{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} \approx \mathbb{I} + \frac{2\boldsymbol{\varepsilon}}{2}$$

soit finalement, à l'ordre un :

$$\mathbb{F} = \mathbb{R}\mathbb{U} \approx (\mathbb{I} + \mathbb{r})(\mathbb{I} + \boldsymbol{\varepsilon}) \approx \mathbb{I} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbb{r}$$

■ **Exemple 1.20 — Torsion d'un arbre cylindrique : transformation du voisinage d'un point.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.4, pour laquelle on a vu dans l'exemple 1.16 que le champ de déplacement, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, s'écrivait comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{rzc(t)}{L} \mathbf{i}_{\theta}(\theta), \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

et que, dans ce même cadre, le tenseur gradient du déplacement s'exprimait comme :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{zc(t)}{L} \mathbf{i}_{\theta}(\theta) \otimes \mathbf{i}_r(\theta) - \frac{zc(t)}{L} \mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_{\theta}(\theta) + \frac{rc(t)}{L} \mathbf{i}_{\theta}(\theta) \otimes \mathbf{i}_z$$

ce qui avait permis de déterminer le tenseur des petites déformations :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{rc(t)}{L} \mathbf{i}_{\theta}(\theta) \otimes_S \mathbf{i}_z$$

De ces résultats, il est facile d'obtenir que la partie antisymétrique du tenseur gradient du déplacement s'écrit

comme :

$$\mathbb{T}(\mathbf{x}, t) = 2 \frac{zc(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes_A \mathbf{i}_r(\theta) + \frac{rc(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes_A \mathbf{i}_z$$

où $\mathbf{a} \otimes_A \mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})/2$ est la partie antisymétrique du tenseur $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$. Le premier terme peut notamment s'interpréter comme une (petite) rotation d'axe $\mathbf{i}_z$ et d'angle $zc(t)/L$, qui correspond au tenseur de rotation $\mathbb{R}$ que l'on avait mis en évidence dans l'exemple 1.10. ■

Analyse locale des déformations

On a vu précédemment que, dans le cas général, le tenseur des petites déformations n'est pas diagonal quand on l'exprime dans une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ donnée : ceci signifie physiquement qu'un sous-domaine élémentaire, de forme cubique et d'arêtes selon ces trois directions, subit une distorsion. On peut alors s'interroger sur la possibilité de trouver des orientations telles que ces cubes élémentaires restent effectivement de forme parallélépipédique.

La réponse à cette question peut être mathématique : en effet, nous avons vu que, par définition, le tenseur des petites déformations est, en tout point et à tout instant, symétrique. Il est ainsi possible de trouver une base orthonormée de vecteurs propres Φ_k^ε tels que l'on peut écrire :

$$\mathbb{E} \Phi_k^\varepsilon = \lambda_k^\varepsilon \Phi_k^\varepsilon$$

On appelle les valeurs propres λ_k^ε les « déformations principales », et les vecteurs propres Φ_k^ε associés les « directions principales de déformation ». Dans le cas général, ces quantités dépendent du point et de l'instant considérés.

Ainsi, physiquement, tout sous-domaine élémentaire de forme cubique et orienté selon ces trois directions Φ_k^ε ne subit que des allongements ou des raccourcissements selon ces axes, sans aucune distorsion. D'un point de vue graphique, il est alors possible de représenter, en chaque point du domaine, trois vecteurs orientés selon les directions propres Φ_k^ε et d'amplitudes les déformations principales λ_k^ε , ce qui peut faciliter la compréhension du champ de déformations d'une pièce complexe.

■ **Exemple 1.21 — Torsion d'un arbre cylindrique : déformations principales.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.4, pour laquelle on a vu dans l'exemple 1.16 que le champ de déplacement, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, s'écrivait comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{rc(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(\theta), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

et que, dans ce même cadre, le tenseur des petites déformations s'exprimait comme :

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{rc(t)}{L} \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes_S \mathbf{i}_z$$

Les déformations principales λ_k^ε se définissant comme les valeurs propres du tenseur des petites déformations, il est par exemple possible de les déterminer comme les racines du polynôme caractéristique (comme précisé dans l'annexe A.2.4) :

$$0 = \det(\mathbb{E} - \lambda_k^\varepsilon \mathbb{I}) = -\lambda_k^{\varepsilon 3} + \left(\frac{rc(t)}{2L} \right)^2 \lambda_k^\varepsilon$$

ce qui permet donc d'obtenir comme déformations principales :

$$\lambda_1^\varepsilon = \frac{rc(t)}{2L}, \quad \lambda_2^\varepsilon = 0, \quad \lambda_3^\varepsilon = -\frac{rc(t)}{2L}$$

de directions principales associées :

$$\Phi_1^\varepsilon = (\mathbf{i}_\theta + \mathbf{i}_z)/\sqrt{2}, \quad \Phi_2^\varepsilon = \mathbf{i}_r, \quad \Phi_3^\varepsilon = (\mathbf{i}_\theta - \mathbf{i}_z)/\sqrt{2}$$

La figure ci-dessous représente ces directions principales pour divers points de la surface latérale du cylindre.



Ainsi, tout domaine élémentaire de forme cubique et orienté selon $\mathbf{i}_r$ et selon la bissectrice de l'angle formé par $\mathbf{i}_\theta$ et $\mathbf{i}_z$ ne subit aucune distorsion, en s'allongeant selon $(\mathbf{i}_\theta + \mathbf{i}_z)/\sqrt{2}$ et en se raccourcissant selon $(\mathbf{i}_\theta - \mathbf{i}_z)/\sqrt{2}$. ■

R Il est bien sûr possible de définir de façon analogue les déformations principales et directions principales du tenseur des déformations de Green Lagrange, vu que ce dernier est symétrique. L'interprétation physique est alors identique au cas des petites déformations.

Mesure de déformations

D'un point de vue expérimental, la mesure des déformations relève de ce que l'on appelle l'« extensométrie » ; parmi les techniques les plus courantes, on peut citer :

- les extensomètres, qui sont des appareils fixés à la surface de l'objet étudié à l'aide de deux « couteaux » alignés perpendiculairement à l'axe de mesure $\mathbf{e}$ (comme on peut le voir sur la figure 1.5a), et qui permettent ainsi de mesurer la variation de longueur Δl entre les deux zones en contact avec l'extensomètre ; on fait alors l'hypothèse que la déformation est homogène entre les deux couteaux initialement distants de l_0 , de façon à déterminer :

$$\varepsilon_{ee} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \frac{\Delta l}{l_0}$$

- les jauges de déformation, qui consistent en un fil conducteur dont on mesure la variation de résistance électrique à l'aide d'un pont de Wheatstone ; comme le montre la figure 1.5b, ce fil est disposé en spires rapprochées et orientées selon une direction $\mathbf{e}$ privilégiée, selon laquelle on peut mesurer la déformation, vu que la variation de longueur d'un conducteur électrique est directement proportionnelle à la variation de résistance électrique R à ses bornes :

$$\varepsilon_{ee} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \propto \frac{\Delta R}{R}$$

les dimensions de la jauge étant généralement petites, on peut usuellement considérer que la mesure est ponctuelle ; en associant au même point des jauges d'orientations différentes, il est possible de déterminer les trois composantes de déformations dans le plan de la surface sur laquelle sont collées les jauges, comme on le verra dans l'exemple 1.22 ;

- les techniques de corrélations d'images (voir [Bré+11]), qui permettent, à l'aide d'images successives (photographies, clichés de microscopie électronique, ...), de déterminer par traitement informatique les déplacements des différents points de l'image d'un cliché à l'autre, et ainsi de calculer le champ des déformations dans le plan $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ de la surface observée :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{11} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \varepsilon_{22} \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + 2\varepsilon_{12} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2$$

dans le cas où il est possible d'avoir deux appareils d'acquisition, on peut alors, par stéréocorrélation, obtenir des informations concernant également le déplacement hors plan des points de la surface observée (qui, de plus, peut alors être de forme quelconque).

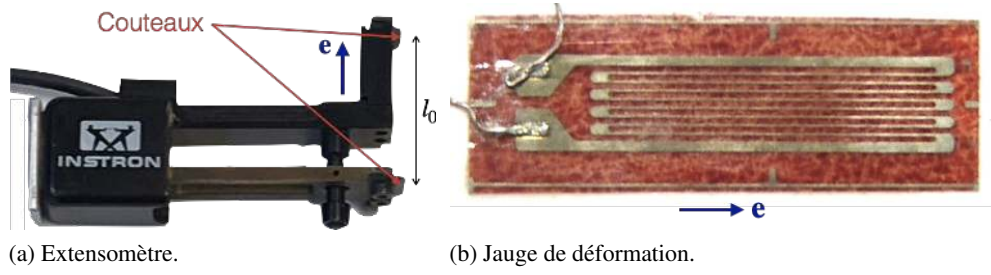


FIGURE 1.5 – Mesure de déformations.

■ **Exemple 1.22 — Rosettes de jauges de déformation.** On place autour d'un même point, sur la surface plane d'une structure, trois jauges de déformation d'orientations $\mathbf{e}_k$ différentes, qui permettent de mesurer chacune la déformation longitudinale ε_{e_k} selon la direction $\mathbf{e}_k$. On cherche alors à relier ces trois mesures aux composantes planes du tenseur des petites déformations au point considéré, dans une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ de la surface étudiée :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{11}\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \varepsilon_{22}\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + 2\varepsilon_{12}\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2$$

En considérant que θ_k est l'angle formé par la direction $\mathbf{i}_1$ et la direction $\mathbf{e}_k$ de la jauge k , on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{e_k} &= \langle \mathbf{e}_k, \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_k \rangle \\ &= \langle \cos \theta_k \mathbf{i}_1 + \sin \theta_k \mathbf{i}_2, \boldsymbol{\varepsilon} (\cos \theta_k \mathbf{i}_1 + \sin \theta_k \mathbf{i}_2) \rangle \\ &= \langle \cos \theta_k \mathbf{i}_1 + \sin \theta_k \mathbf{i}_2, \cos \theta_k (\varepsilon_{11}\mathbf{i}_1 + \varepsilon_{12}\mathbf{i}_2) + \sin \theta_k (\varepsilon_{12}\mathbf{i}_1 + \varepsilon_{22}\mathbf{i}_2) \rangle \\ &= \cos^2 \theta_k \varepsilon_{11} + \sin^2 \theta_k \varepsilon_{22} + 2 \cos \theta_k \sin \theta_k \varepsilon_{12} \end{aligned}$$

On détermine alors les composantes du tenseur des petites déformations en inversant le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta_1 & \sin^2 \theta_1 & 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \\ \cos^2 \theta_2 & \sin^2 \theta_2 & 2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ \cos^2 \theta_3 & \sin^2 \theta_3 & 2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{e_1} \\ \varepsilon_{e_2} \\ \varepsilon_{e_3} \end{pmatrix}$$

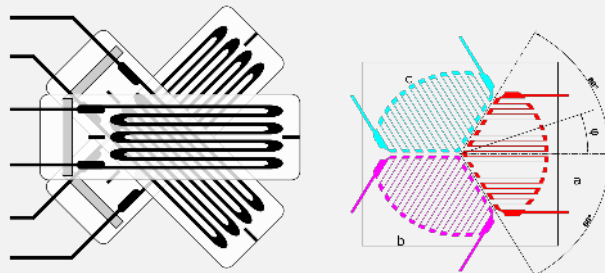
En pratique, il est possible d'utiliser des « rosettes » de jauges orientées selon des angles particuliers :

- des rosettes « rectangulaires », où les jauges sont alors séparées par des angles de 45° ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$, $\theta_3 = 90^\circ$ par exemple), ce qui permet d'établir que :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{e_1}, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{e_3}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{e_2} - \frac{\varepsilon_{e_1} + \varepsilon_{e_3}}{2}$$

- des rosettes « équiangulaires », où les jauges sont séparées par des angles de 60° ($\theta_1 = -60^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, $\theta_3 = 60^\circ$ par exemple), ce qui permet d'obtenir :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{e_2}, \varepsilon_{22} = \frac{2\varepsilon_{e_1} + 2\varepsilon_{e_3} - \varepsilon_{e_2}}{3}, \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_{e_3} - \varepsilon_{e_1}}{\sqrt{3}}$$



1.4 Variation de volume et conservation de la masse

En complément de l'étude des variations locales de longueurs et d'angles, il peut être intéressant de déterminer si la transformation subie par le domaine considéré se fait à volume constant ou non. Étant donné que la masse est supposée être une propriété invariante de la matière, la variation de volume locale permet alors d'avoir des informations sur l'évolution de la masse volumique au cours du temps.

1.4.1 Variation de volume

À l'échelle globale, il faut pouvoir relier les estimations du volume occupé par le domaine matériel entre les configurations initiale et actuelle ; par définition, on peut écrire que :

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(0) = \int_{\Omega_0} dV_p$$

est le volume initial du domaine, tandis que le volume à l'instant actuel est :

$$\mathcal{V}(t) = \int_{\Omega_t} dV_x$$

Par changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ dans cette dernière intégrale, on établit, à l'aide du résultat de l'annexe B.2.1, que :

$$\mathcal{V}(t) = \int_{\Omega_t} dV_x = \int_{\Omega_0} \det \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) dV_p$$

ou, localement, comme représenté sur la figure 1.6, que le volume élémentaire $dV_p = |\langle d\mathbf{p}_1, d\mathbf{p}_2 \wedge d\mathbf{p}_3 \rangle|$ dans la configuration initiale se transforme comme $dV_x = |\langle d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2 \wedge d\mathbf{x}_3 \rangle|$ tel que :

$$dV_x = \det \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) dV_p$$

ce qui permet d'affirmer que la variation locale de volume s'exprime à l'aide du déterminant du tenseur gradient de la transformation.

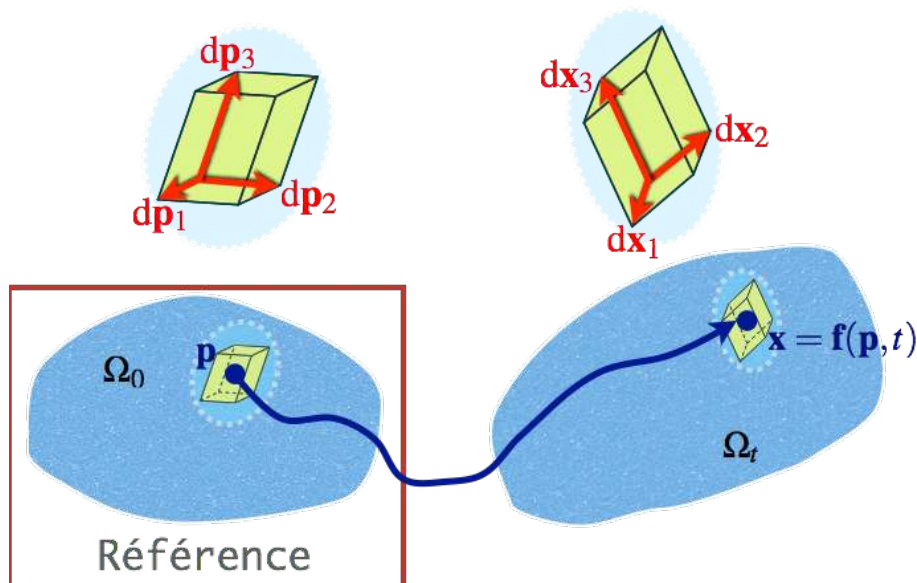


FIGURE 1.6 – Variation de volume élémentaire.

Si l'on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, on écrit alors que $\mathbb{F} = \mathbb{I} + \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}$ avec $\|\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\| \ll 1$, ce qui permet d'établir, à l'aide d'un développement limité à l'ordre un du déterminant, que :

$$\det \mathbb{F} = \det(\mathbb{I} + \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}) \approx 1 + \text{tr} \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}$$

En réécrivant cette expression à l'aide de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) , on remarque que :

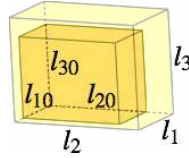
$$\text{tr} \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$$

où $\text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$ est la divergence du champ de déplacement (définie dans l'annexe B.1.1), ce qui permet d'établir finalement que la variation locale relative de volume peut s'écrire, pour tout volume élémentaire $\mathcal{V}$ situé en $\mathbf{x}$, comme :

$$\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$$

où $d\mathcal{V}$ est la variation du volume $\mathcal{V}$ entre les deux configurations.

R Ce dernier résultat peut s'interpréter physiquement à l'aide d'un volume élémentaire de forme parallélépipédique rectangle, initialement de dimensions l_{10} , l_{20} et l_{30} selon les directions propres $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ du tenseur des petites déformations en ce point.



Ces dimensions deviennent alors à l'instant actuel $l_1 = l_{10} + \Delta l_1$, $l_2 = l_{20} + \Delta l_2$ et $l_3 = l_{30} + \Delta l_3$ respectivement, de sorte que l'on peut écrire que :

$$\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} \approx \frac{\Delta l_1}{l_{10}} + \frac{\Delta l_2}{l_{20}} + \frac{\Delta l_3}{l_{30}} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$$

vu que $|\Delta l_k| \ll l_{k0}$, $1 \leq k \leq 3$.

■ **Exemple 1.23 — Allongement uniforme : variation de volume.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.1 :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + a(t) \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

et pour laquelle on a exprimé dans l'exemple 1.7 le gradient de la transformation dans une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)$ comme :

$$\mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + a(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{n}, \mathbf{i}_3)}$$

où $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_3$ sont deux vecteurs unitaires perpendiculaires à $\mathbf{n}$, et entre eux.

Il est alors facile de déterminer que $\det \mathbb{F} = 1 + a(t)$, $\forall \mathbf{p} \in \Omega_0$, et donc que la variation locale relative de volume est uniforme, et s'exprime comme la variation globale qui vaut :

$$\frac{\mathcal{V}(t) - \mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_0} = a(t)$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations ($|a(t)| \ll 1$, $\forall t$), on retrouve sur cet exemple précis un résultat similaire :

$$\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \text{tr} \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = \text{tr}(a(t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = a(t)$$

qui est uniforme, et permet de retrouver la même variation globale que précédemment. ■

Les relations précédentes permettent alors d'introduire et de caractériser la notion d'incompressibilité.

Incompressibilité. Un domaine matériel sera qualifié d'incompressible si la transformation qu'il subit se fait localement, en tout point, à volume constant, c'est-à-dire si :

$$\det \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) = 1, \forall \mathbf{p} \in \Omega_0, \forall t$$

Cette condition devient, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t$$

■ **Exemple 1.24 — Torsion d'un arbre cylindrique : variation de volume.** On considère la transformation décrite dans l'exemple 1.4 :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} + p_r (\mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) - \mathbf{i}_r(p_\theta)) = p_r \mathbf{i}_r(p_\theta + c(t)p_z/L) + p_z \mathbf{i}_z, \forall \mathbf{p} \in \Omega_0$$

et pour laquelle on a exprimé dans l'exemple 1.10 le gradient de la transformation comme :

$$\mathbb{F} = \mathbb{R}\mathbb{G}$$

où $\mathbb{R}$ est un tenseur de rotation, qui vérifie $\det \mathbb{R} = 1$, et :

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{p_r c(t)}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_r(p_\theta), \mathbf{i}_\theta(p_\theta), \mathbf{i}_z)}$$

Il est alors facile de déterminer que $\det \mathbb{F} = (\det \mathbb{R})(\det \mathbb{G}) = 1$, $\forall \mathbf{p} \in \Omega_0$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de variation locale relative de volume, et donc que :

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0, \forall t$$

En effet, le cylindre, même en torsion, a toujours le même volume vu que les différentes sections ne font que tourner autour de l'axe $\mathbf{i}_z$ sans se déformer.

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, on retrouve sur cet exemple précis un résultat similaire :

$$\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \frac{c(t)}{L} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (r z \mathbf{i}_\theta(\theta)) = 0$$

qui permet de retrouver que le volume du domaine matériel reste constant au cours du temps. ■

Résumé 1.4 — Variation locale de volume. La variation au cours du temps du volume d'un sous-domaine élémentaire $d\Omega_0$, autour de $\mathbf{p}$ dans la configuration initiale, s'exprime comme :

$$dV_x = \det \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) dV_p, \forall \mathbf{p} \in \Omega_0, \forall t$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations, on a comme variation relative de volume pour un volume élémentaire $\mathcal{V}$:

$$\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = \operatorname{tr} \mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t$$

R Il est possible d'évaluer, de la même façon que pour les volumes, l'évolution de l'aire d'une surface ; l'annexe B.2.1 permet d'établir qu'une surface élémentaire $dS_p = \|\mathbf{dp}_1 \wedge \mathbf{dp}_2\|$ dans la configuration initiale se transforme comme $dS_x = \|\mathbf{dx}_1 \wedge \mathbf{dx}_2\|$ telle que :

$$dS_x = \det \mathbb{F} \left\| \mathbb{F}^{-T} (\mathbf{dp}_1 \wedge \mathbf{dp}_2) \right\| = \det \mathbb{F} \left\| \mathbb{F}^{-T} \mathbf{n}_p \right\| dS_p$$

en notant $\mathbf{n}_p$ la normale unitaire à la surface initiale (telle que $\mathbf{dp}_1 \wedge \mathbf{dp}_2 = dS_p \mathbf{n}_p$).

On constate en particulier que, même dans le cas d'une transformation incompressible ($\det \mathbb{F} = 1$), il est possible d'avoir des variations d'aires de certaines surfaces ($\|\mathbb{F}^{-T} \mathbf{n}_p\| \neq 1$).

1.4.2 Conservation de la masse

Un corollaire à l'expression de la variation de volume est l'évolution de la masse volumique, qu'il a été possible de définir comme une quantité locale, attachée aux particules constituant le milieu considéré, en vertu de l'hypothèse de continuité de ce dernier.

Expression matérielle

Ainsi, on peut considérer un sous-domaine ω_t arbitraire, contenu dans le domaine Ω_t ; comme la masse est une propriété que l'on suppose invariante, il est possible d'affirmer que :

$$\mathcal{M} = \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV_x = \int_{\omega_0} \rho_0(\mathbf{p}) dV_p, \forall t$$

en associant à la configuration initiale la masse volumique ρ_0 , et à la configuration actuelle la masse volumique ρ . En transformant, comme dans le cas de l'expression de la variation de volume, la première intégrale à l'aide du changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$, on peut ainsi affirmer que :

$$\int_{\omega_0} (\rho(\mathbf{f}(\mathbf{p}, t), t) \det \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) - \rho_0(\mathbf{p})) dV_p = 0, \forall t, \forall \omega_t \subset \Omega_t$$

Comme cette relation est valable quel que soit le sous-domaine ω_t inclus dans Ω_t , on peut en déduire que c'est l'intégrande qui s'annule, et donc que :

$$\rho(\mathbf{f}(\mathbf{p}, t), t) = \frac{\rho_0(\mathbf{p})}{\det \mathbb{F}(\mathbf{p}, t)}, \forall \mathbf{p} \in \Omega_0, \forall t$$

sachant que l'on a toujours $\det \mathbb{F} > 0$.

En outre, si l'on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, on peut, comme précédemment, écrire à l'ordre un que :

$$(\det \mathbb{F})^{-1} \approx 1 - \text{tr} \mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = 1 - \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$$

et ainsi obtenir, toujours à l'ordre un, que :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}) (1 - \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t$$

en confondant $\mathbf{p} \approx \mathbf{x}$.



Ces deux expressions sont relativement peu utilisées en pratique ; dans le cas des milieux fluides où la conservation de la masse est souvent invoquée, on préfère utiliser la version spatiale de ce principe, plus adaptée.

Incompressibilité

L'incompressibilité se traduit directement en termes de masse volumique comme :

$$\rho(\mathbf{f}(\mathbf{p}, t), t) = \rho_0(\mathbf{p}), \forall \mathbf{p} \in \Omega_0, \forall t$$

que l'on soit dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations ou non. Physiquement, chaque particule matérielle voit sa masse volumique inchangée au cours du temps.

Résumé 1.5 — Conservation matérielle de la masse. La masse volumique locale ρ évolue au cours du temps comme :

$$\rho(\mathbf{f}(\mathbf{p}, t), t) = \frac{\rho_0(\mathbf{p}_0)}{\det \mathbb{F}(\mathbf{p}, t)}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega_0, \quad \forall t$$

où ρ_0 est la masse volumique locale dans la configuration de référence.

1.5 Résumé des formules importantes

Tenseur gradient de la transformation – Résumé 1.1 page 13

$$d\mathbf{x} = \mathbb{F} d\mathbf{p}$$

$$\mathbb{F} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_n} \otimes \mathbf{i}_n$$

$$\mathbb{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_r} \otimes \mathbf{i}_r + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_\theta} \otimes \frac{\mathbf{i}_\theta}{p_r} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p_z} \otimes \mathbf{i}_z$$

Tenseur des déformations de Green-Lagrange – Résumé 1.2 page 21

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbb{I})$$

$$\frac{\|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{p}\|^2}{\|d\mathbf{p}\|^2} = 2 \langle \mathbb{E} \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_p \rangle$$

$$\cos \alpha_{12x} = \frac{\langle \mathbb{F} \mathbf{e}_{p1}, \mathbb{F} \mathbf{e}_{p2} \rangle}{\|\mathbb{F} \mathbf{e}_{p1}\| \|\mathbb{F} \mathbf{e}_{p2}\|} = \frac{\cos \alpha_{12p} + 2 \langle \mathbb{E} \mathbf{e}_{p1}, \mathbf{e}_{p2} \rangle}{\sqrt{\langle (2\mathbb{E} + \mathbb{I}) \mathbf{e}_{p1}, \mathbf{e}_{p1} \rangle \langle (2\mathbb{E} + \mathbb{I}) \mathbf{e}_{p2}, \mathbf{e}_{p2} \rangle}}$$

Tenseur des petites déformations – Résumé 1.3 page 27

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n} \otimes_S \mathbf{i}_n$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \otimes_S \mathbf{i}_r + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} \otimes_S \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \otimes_S \mathbf{i}_z$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$$

$$\frac{\Delta \alpha_{12}}{2} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle$$

Variation locale de volume – Résumé 1.4 page 35

$$d\Omega_t = \det \mathbb{F} d\Omega_0$$

$$\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = \text{tr } \mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}$$

Conservation matérielle de la masse – Résumé 1.5 page 37

$$\rho = \frac{\rho_0}{\det \mathbb{F}}$$

2. Contraintes

Les contraintes traduisent les efforts intérieurs au sein des milieux déformables, en remplaçant l'action mécanique qu'exerce un volume de matière, qui serait supprimé (par la pensée) du domaine, sur la partie restante de ce dernier. Elles dépendent du point considéré et de l'orientation de la « coupure » effectuée. Le calcul et l'optimisation des contraintes sont indispensables dans toute étude de dimensionnement d'un objet qui doit résister à des sollicitations mécaniques.

POURQUOI ÉTUDIER LES CONTRAINTES ?

2.1 Relations fondamentales de la dynamique pour un domaine matériel

On considère, comme dans le chapitre précédent, un domaine matériel que l'on suit au cours du temps ; on suppose qu'il occupe à l'instant actuel le domaine Ω_t , dont la position et la forme dépendent des efforts qui s'exercent sur le domaine, à savoir, comme représenté sur la figure 2.1 :

- une densité volumique d'efforts $\mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t)$, qui s'applique en tout point $\mathbf{x}$ de l'intérieur du domaine Ω_t , et qui s'exprime en N/m^3 ; il s'agit typiquement de forces qui s'exercent à distance (force liée à la pesanteur, force de Laplace, ...) ;
- une densité surfacique d'efforts $\mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t)$, qui s'applique en tout point $\mathbf{x}$ de la frontière $\partial\Omega_t$ du domaine Ω_t , et qui s'exprime en N/m^2 ; il s'agit cette fois-ci de forces qui s'exercent par contact (force de pression d'un fluide sur une paroi, force au niveau de la surface de contact entre deux solides, ...).

Dans les deux cas, c'est effectivement la configuration actuelle Ω_t qu'il faut considérer pour appliquer les relations fondamentales de la dynamique.

2.1.1 Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique

À chaque fois, on considère l'ensemble des particules matérielles constituant le domaine Ω_t , et pour lesquelles on peut mettre en application les lois de Newton.

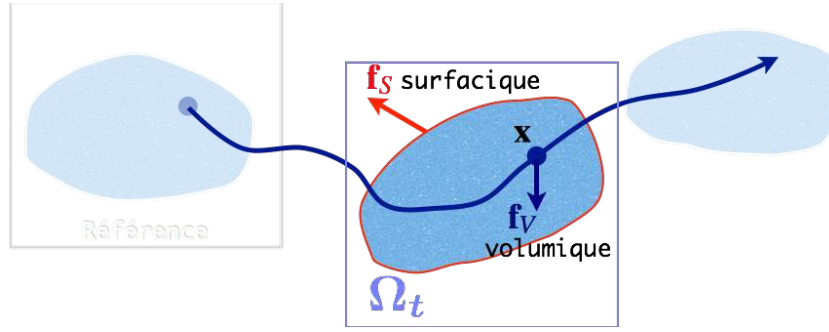


FIGURE 2.1 – Densités d'efforts s'exerçant sur un domaine matériel.

Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement $\mathbf{q}_k$ d'un corps ponctuel k de masse m_k et de vitesse $\mathbf{v}_k$ se définit classiquement comme le produit de l'une par l'autre : $\mathbf{q}_k(t) = m_k \mathbf{v}_k(t)$, $\forall t$. La seconde loi de Newton consiste alors à exprimer que cette quantité évolue à chaque instant comme la somme des forces $\mathbf{F}_k$ qui s'exercent sur le corps :

$$\dot{\mathbf{q}}_k(t) = \mathbf{F}_k(t), \forall t$$

avec, notamment, $\dot{\mathbf{q}}_k(t) = m_k \mathbf{a}_k(t)$, où $\mathbf{a}_k$ est l'accélération de la particule considérée.

Si l'on considère maintenant un ensemble $\mathcal{S}$ de N corps ponctuels de masses et vitesses respectives m_k et $\mathbf{v}_k$, la somme des différentes équations permet d'établir que :

$$\sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{q}}_k(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(t), \forall t$$

Parmi l'ensemble des forces $\mathbf{F}_k$ s'exerçant sur les corps, on peut considérer en particulier les forces $\mathbf{F}_{i \rightarrow j}$ et $\mathbf{F}_{j \rightarrow i}$ qui s'exercent entre deux corps i et j donnés ; en vertu de la troisième loi de Newton (ou principe d'action-réaction), on peut écrire que ces deux forces se compensent : $\mathbf{F}_{i \rightarrow j} = -\mathbf{F}_{j \rightarrow i}$. Ceci permet donc d'éliminer dans la somme précédente toutes les forces qui s'exercent entre deux corps de l'ensemble $\mathcal{S}$, ce qui permet d'écrire que :

$$\sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{q}}_k(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{\mathcal{T} \rightarrow k}(t) = \mathbf{F}_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}}(t), \forall t$$

en notant $\mathbf{F}_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}}$ la somme des forces exercées par l'extérieur sur l'ensemble considéré. En posant enfin que la quantité de mouvement $\mathbf{q}_{\mathcal{S}}$ de l'ensemble $\mathcal{S}$ est la somme des quantités de mouvement des corps qui le constituent, on aboutit alors à :

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{S}}(t) = \mathbf{F}_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}}(t), \forall t$$

En considérant maintenant que les corps sont les particules élémentaires ponctuelles du domaine Ω_t , on peut, en passant à la limite, remplacer la somme discrète par une intégrale, en définissant la quantité de mouvement du domaine matériel comme :

$$\mathbf{q}_{\Omega}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}, \forall t$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ est la vitesse de la particule située en $\mathbf{x}$ à l'instant t , et $\rho(\mathbf{x}, t)$ est sa masse volumique. De même, les efforts exercés sur Ω correspondent effectivement aux densités surfaciques et volumiques que l'on a évoquées plus haut, qu'il faut donc intégrer respectivement sur la surface et dans

l'intérieur du domaine Ω_t . La conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc pour le domaine matériel comme :

$$\dot{\mathbf{q}}_{\Omega}(t) = \overbrace{\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_x}^{\cdot} = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t) dS_x, \forall t$$

Au premier abord, le membre de gauche semble difficile à calculer, puisqu'il s'agit de dériver par rapport au temps une intégrale dont le domaine d'intégration (Ω_t) dépend lui-même du temps ; mais en utilisant certains résultats non détaillés ici, il est possible de transformer la dérivée de la quantité de mouvement comme une quantité d'accélération, pour obtenir finalement :

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV_x = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t) dS_x, \forall t$$

où $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ est l'accélération de la particule située en $\mathbf{x}$ à l'instant t .

Conservation du moment cinétique

Une équation de conservation analogue à la précédente concerne le moment cinétique, qui joue un rôle similaire vis-à-vis des rotations à celui joué par la quantité de mouvement pour les translations ; pour un corps ponctuel de masse m_k , de vitesse $\mathbf{v}_k$, et situé en $\mathbf{x}_k$, on définit le moment cinétique comme le moment par rapport à un point O fixe (dans le référentiel considéré) de la quantité de mouvement, à savoir : $\mathbf{s}_{\mathbf{x}_O}^k(t) = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{q}_k(t)$, $\forall t$. Sa dérivée s'écrit alors comme :

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{x}_O}^k(t) = \overbrace{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_O)}^{\cdot} \wedge (m_k \mathbf{v}_k(t)) + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_O) \wedge \dot{\mathbf{q}}_k(t)$$

Comme O est fixe, on a $\overbrace{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_O)}^{\cdot} = \dot{\mathbf{x}}_k$, qui est la dérivée temporelle du placement du corps considéré, c'est-à-dire $\mathbf{v}_k(t)$. On a donc :

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{x}_O}^k(t) = \mathbf{v}_k(t) \wedge m_k \mathbf{v}_k(t) + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_O) \wedge \dot{\mathbf{q}}_k(t) = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_O) \wedge m_k \mathbf{a}_k(t)$$

En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, on aboutit finalement à :

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{x}_O}^k(t) = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{F}_k(t), \forall t$$

où $\mathbf{F}_k$ est la somme des forces qui s'exercent sur le corps.

Comme pour le cas de la conservation de la quantité de mouvement, on peut transposer l'expression précédente au cas d'un domaine matériel, constitué de particules ponctuelles de masse volumiques $\rho(\mathbf{x}, t)$, pour lequel on écrit que :

$$\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{x}_O}^{\Omega}(t) = \overbrace{\int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV_x}^{\cdot} = \int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t) dS_x, \forall t$$

où $\mathbf{s}_{\mathbf{x}_O}^{\Omega}$ est le moment cinétique de Ω au point O . Il est de nouveau possible de transformer l'expression précédente comme :

$$\int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV_x = \int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t) dS_x, \forall t$$



Comme dans le chapitre précédent, on a éludé volontairement la question du « référentiel » en supposant donc pour le moment que les mouvements sont décrits par rapport à un observateur « fixe » sans plus de détails. Des précisions peuvent être trouvées dans [Bou87 ; Sal05].

Résumé 2.1 — Relations fondamentales de la dynamique. Tout ensemble de particules matérielles, occupant à l'instant t le domaine Ω_t , et soumis à des densités d'efforts :

- volumiques $\mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t)$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega_t$ d'une part ;
- surfaciques $\mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t)$, $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_t$ d'autre part ;

vérifie le principe de conservation de la quantité de mouvement :

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV_x = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t) dS_x, \forall t$$

aussi appelé principe fondamental de la dynamique en résultante, et le principe de conservation du moment cinétique, en tout point O fixe :

$$\int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV_x = \int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t) dS_x, \forall t$$

aussi appelé principe fondamental de la dynamique en moment. En outre, $\rho(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ désignent respectivement la masse volumique et l'accélération, définies en tout point $\mathbf{x} \in \Omega_t$ du milieu continu.

2.1.2 Actions mécaniques

Ces deux équations de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique permettent de mettre en évidence ce qu'est une action mécanique ; cette dernière est issue des densités volumiques et surfaciques d'efforts s'exerçant sur le domaine matériel.

Action mécanique. Une action mécanique est une cause agissant sur le mouvement d'un domaine matériel. Pour décrire l'ensemble des actions mécaniques s'exerçant sur un domaine matériel, on définit classiquement :

- la résultante des efforts appliqués au domaine, souvent qualifiée de « résultante des efforts extérieurs », qui se traduit par l'intégrale, respectivement sur la surface et dans l'intérieur du domaine, des densités d'efforts surfaciques et volumiques considérées :

$$\mathbf{R}^{ext}(t) = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t) dS_x, \forall t$$

- le moment en un point O donné des efforts appliqués au domaine, souvent qualifié de « moment des efforts extérieurs », qui s'exprime comme l'intégrale, respectivement sur la surface et dans l'intérieur du domaine, des moments en O de ces densités surfaciques et volumiques :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O}^{ext}(t) = \int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t) dS_x, \forall t$$

De manière analogue, une action mécanique se traduit donc par une résultante et un moment exprimé en un point.

L'expression du moment change naturellement en fonction du point choisi : si l'on prend l'exemple d'une densité surfacique d'efforts $\mathbf{f}_S$ (de contact au niveau d'une surface Σ_c par exemple), le moment $\mathbf{M}_{\mathbf{x}_A}^c$ en un point A arbitraire peut s'exprimer comme :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_A}^c = \int_{\Sigma_c} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{f}_S dS_x$$

et, si l'on fait intervenir un autre point B arbitraire, on obtient, avec la relation de Chasles :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_A}^c = \int_{\Sigma_c} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{f}_S dS_x = \int_{\Sigma_c} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \wedge \mathbf{f}_S dS_x + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \wedge \left(\int_{\Sigma_c} \mathbf{f}_S dS_x \right)$$

ce qui permet d'introduire la résultante $\mathbf{R}^c$ associée à cette action de contact, et d'aboutir à la relation classique de changement de point pour le moment d'une action mécanique :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_A}^c = \mathbf{M}_{\mathbf{x}_B}^c + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{R}^c$$

R On déduit de la relation précédente qu'il est très facile d'exprimer la conservation du moment cinétique en un autre point que O ; en effet, la relation de Chasles nous permet d'écrire à l'aide d'un point A que :

$$\int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A + \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \wedge \rho \mathbf{a} dV_x = \int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A + \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_V dV_x + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A + \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_S dS_x$$

or, en utilisant la conservation de la quantité de mouvement :

$$\int_{\Omega_t} (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \wedge \rho \mathbf{a} dV_x = (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \wedge \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{a} dV_x = (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \wedge \left(\int_{\Omega_t} \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t) dS_x \right)$$

on peut simplifier comme :

$$\int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \wedge \rho \mathbf{a} dV_x = \int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{f}_V dV_x + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{f}_S dS_x$$

ce qui correspond à l'expression de la conservation du moment cinétique au point A .

Actions mécaniques particulières. Il est possible d'en dégager deux formes spécifiques :

- **Couple** : une action mécanique dont la résultante est nulle est appelée « couple » ; du fait de la formule de changement de point, le moment associé est alors indépendant du point où on l'exprime, et est lui aussi appelé couple.
- **Glisseur** : une action mécanique pour laquelle il existe au moins un point où le moment est nul est appelée « glisseur » ; dans ce cas, le moment est nul en tout point de la droite passant par ce point particulier, et dirigée selon la résultante. Par abus de langage, on parle souvent de « force » également pour désigner un glisseur.

■ **Exemple 2.1 — Action de la pesanteur.** À titre d'exemple, l'action de la pesanteur est caractérisée par une densité volumique d'effort $\mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) = -\rho(\mathbf{x}, t)g\mathbf{i}_3$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega_t$, où $\mathbf{i}_3$ est unitaire, vertical, et dirigé vers le haut. La résultante associée est :

$$\mathbf{R}^g = \int_{\Omega_t} -\rho(\mathbf{x}, t)g\mathbf{i}_3 dV_x = - \left(\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV_x \right) g\mathbf{i}_3$$

en considérant que l'accélération de la pesanteur g est uniforme, soit finalement :

$$\mathbf{R}^g = -m_{\Omega}g\mathbf{i}_3$$

On a ainsi défini la masse m_{Ω} de façon naturelle comme l'intégrale sur le volume de Ω de la masse volumique $\rho(\mathbf{x}, t)$: on remarque que, en vertu du principe de conservation énoncé dans le paragraphe 1.4.2, la masse ne dépend pas du temps, alors que la masse volumique peut évoluer spatialement au cours du temps au sein du domaine matériel. En outre, le moment en un point A arbitraire s'écrit comme :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_A}^g = \int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \wedge (-\rho(\mathbf{x}, t)g\mathbf{i}_3) dV_x = \left(\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} dV_x - m_{\Omega}\mathbf{x}_A \right) \wedge (-g\mathbf{i}_3)$$

En introduisant le barycentre $C(t)$ de la répartition spatiale des masses au sein de Ω_t , que l'on appelle aussi classiquement « centre d'inertie », on aboutit à :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_A}^g = (\mathbf{x}_C(t) - \mathbf{x}_A) \wedge (-m_{\Omega}g\mathbf{i}_3) = (\mathbf{x}_C(t) - \mathbf{x}_A) \wedge \mathbf{R}^g$$

ce qui permet de conclure que le moment de l'action de la pesanteur, exprimé au centre d'inertie $\mathbf{x}_C(t)$ du domaine Ω_t , est nul, et donc que l'action de la pesanteur est un glisseur. ■

2.1.3 Équilibre statique

Un domaine est en équilibre statique si la position de ses différentes particules matérielles n'évolue pas au cours du temps : on a donc une accélération nulle en tout point ($\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \forall t$), ce qui permet d'écrire que :

$$\mathbf{R}^{ext}(t) = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t) dS_x = \mathbf{0}, \forall t$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O}^{ext}(t) = \int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t) dS_x = \mathbf{0}, \forall t$$

Nous mentionnons dans ce qui suit quelques cas particuliers classiques d'équilibre statique, en détaillant ce que ceci implique sur les actions mécaniques s'exerçant sur le domaine matériel.

Équilibre d'un domaine matériel soumis à deux glisseurs

Le cas le plus simple qui puisse être envisagé est celui d'un domaine matériel soumis à deux glisseurs, à savoir deux actions mécaniques de résultantes respectives $\mathbf{R}_1$ et $\mathbf{R}_2$ et de moments associés nuls, respectivement aux points A_1 et A_2 . Dans ce cas, les équations d'équilibre permettent d'établir :

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}^{ext} = \mathbf{0}$$

en ce qui concerne les résultantes, et, si l'on écrit l'équilibre statique en moment au point A_1 :

$$(\mathbf{x}_{A_2} - \mathbf{x}_{A_1}) \wedge \mathbf{R}_2 = \mathbf{M}_{\mathbf{x}_{A_1}}^{ext} = \mathbf{0}$$

Cette dernière relation permet alors d'affirmer que $\mathbf{R}_2$ (et par conséquent $\mathbf{R}_1$, qui lui est opposée) est colinéaire au vecteur qui relie les deux points A_1 et A_2 (comme illustré sur la figure 2.2), et ce, quelle que soit la forme du domaine matériel.

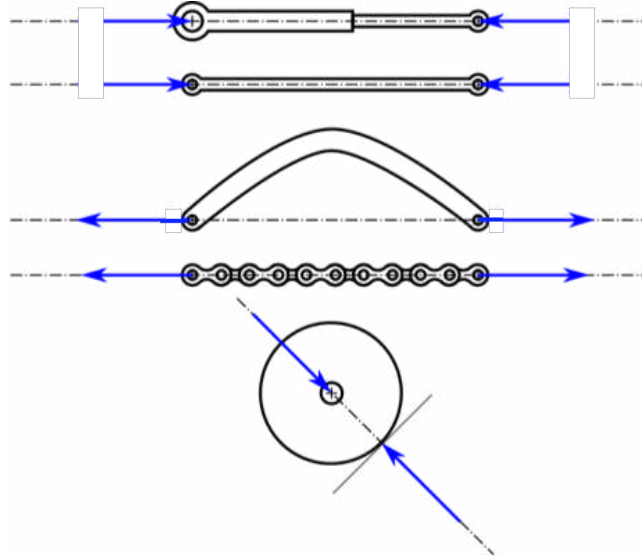


FIGURE 2.2 – Équilibre d'un domaine matériel soumis à deux glisseurs.

Résumé 2.2 — Équilibre statique d'un domaine matériel soumis à deux glisseurs. On considère un domaine Ω soumis à l'action de deux glisseurs, c'est-à-dire deux actions mécaniques de résultantes respectives $\mathbf{R}_1$ et $\mathbf{R}_2$, et de moments associés nuls en A_1 et A_2 respectivement.

Si Ω est en équilibre statique, alors nécessairement les deux résultantes $\mathbf{R}_1$ et $\mathbf{R}_2$ sont opposées et colinéaires au vecteur reliant les points A_1 et A_2 .

Équilibre d'un domaine matériel soumis à trois glisseurs

Un autre cas courant est celui d'un domaine matériel soumis à trois glisseurs, à savoir trois actions mécaniques de résultantes respectives $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$ et de moments associés nuls, respectivement aux points A_1 , A_2 et A_3 . Comme dans le cas de deux glisseurs, l'équation concernant les résultantes permet juste d'affirmer que :

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}^{ext} = \mathbf{0}$$

ce qui implique que les trois résultantes sont coplanaires. Par ailleurs, l'équilibre en moment exprimé au point A_1 donne :

$$(\mathbf{x}_{A_2} - \mathbf{x}_{A_1}) \wedge \mathbf{R}_2 + (\mathbf{x}_{A_3} - \mathbf{x}_{A_1}) \wedge \mathbf{R}_3 = \mathbf{M}_{\mathbf{x}_{A_1}}^{ext} = \mathbf{0}$$

ce qui permet d'affirmer que le plan qui contient les trois résultantes est en fait le plan défini par les trois points A_1 , A_2 et A_3 . Plusieurs situations sont alors envisageables (et résumées sur la figure 2.3) :

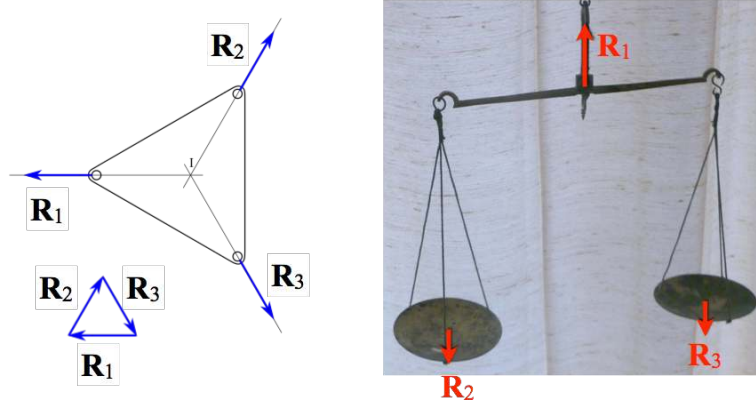


FIGURE 2.3 – Équilibre d'un domaine matériel soumis à trois glisseurs : cas de trois glisseurs concourants (à gauche) et cas de trois glisseurs parallèles (à droite).

- si les deux résultantes $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$ (quand elles sont placées respectivement en A_2 et A_3) se coupent en un point I , les moments en ce point de ces deux actions mécaniques sont alors nuls, et on peut écrire l'équilibre en moment en ce point comme :

$$(\mathbf{x}_{A_1} - \mathbf{x}_I) \wedge \mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{\mathbf{x}_I}^{ext} = \mathbf{0}$$

ce qui implique que $\mathbf{R}_1$ est colinéaire au vecteur reliant les points A_1 et I , autrement dit, que les trois résultantes sont concourantes ; par ailleurs, la somme des trois résultantes est nulle, indiquant que ces dernières forment un triangle, souvent appelé « triangle des forces » ;

- si les deux résultantes $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$ sont parallèles, mais sur des droites différentes (quand elles sont placées respectivement en A_2 et A_3), dans ce cas, on peut juste dire que la résultante $\mathbf{R}_3$ est dans le même plan que les deux autres (et égale à l'opposé de la somme des deux autres) ;

- si les deux résultantes $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$ sont sur la même droite (quand elles sont placées respectivement en A_2 et A_3), dans ce cas les moments en un point de cette droite de ces deux actions mécaniques sont nuls, et on peut par exemple écrire l'équilibre en moment en A_2 comme :

$$(\mathbf{x}_{A_1} - \mathbf{x}_{A_2}) \wedge \mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{\mathbf{x}_{A_2}}^{ext} = \mathbf{0}$$

ce qui signifie que la résultante $\mathbf{R}_1$ est également sur la droite en question, puisque $\mathbf{R}_1$ est, de par l'équilibre en résultante, nécessairement parallèle aux deux autres (et égale à l'opposé de la somme des deux autres).

Résumé 2.3 — Équilibre statique d'un domaine matériel soumis à trois glisseurs. On considère un domaine Ω soumis à l'action de trois glisseurs, c'est-à-dire trois actions mécaniques de résultantes respectives $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$, et de moments associés nuls en A_1 , A_2 et A_3 respectivement.

Si Ω est en équilibre statique, alors nécessairement les trois résultantes $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$ sont de somme nulle et peuvent être (quand elles sont placées respectivement en A_1 , A_2 et A_3) :

- concourantes ;
- parallèles, et, dans ce cas, soit coplanaires, soit sur la même droite.

2.2 Notion de contrainte

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons considéré que les actions mécaniques exercées par l'environnement extérieur sur le domaine matériel Ω . Pour que ce dernier puisse résister à ces sollicitations, il existe des efforts de cohésion au sein de la matière, qui sont les forces de liaison interatomiques dépendant de la composition physico-chimique du matériau et de sa structure.

Bien sûr, compte tenu du cadre de milieu continu que l'on cherche à développer, on ne souhaite pas ici aller jusqu'à ce niveau de détail, mais seulement traduire le fait que ces forces sont à très court rayon d'action, ce qui revient à dire que deux particules éloignées du domaine exercent l'une sur l'autre des actions négligeables. Ce sont donc ces efforts exercés de proche en proche, entre les différentes particules qui constituent le domaine considéré, que nous allons modéliser dans ce qui suit.

2.2.1 Efforts intérieurs

On considère un domaine matériel dans sa configuration actuelle Ω_t , et, en son sein, un sous-domaine ω quelconque que l'on suit également au cours du temps, de sorte qu'il occupe le volume ω_t à l'instant actuel, comme représenté sur la figure 2.4. Ce sous-domaine ω_t peut être de n'importe quelle forme ou taille ; il peut notamment avoir une frontière commune avec la frontière $\partial\Omega_t$ du domaine Ω_t , voire même couper ce dernier en deux parties séparées.

Modélisation

Ce sous-domaine ω_t est alors soumis aux actions mécaniques définies précédemment, qui sont extérieures au domaine Ω_t , mais aussi à l'action du sous-domaine complémentaire de ω_t dans Ω_t , noté $\omega_t^* = \Omega_t \setminus \omega_t$, vu que l'on a supposé que les efforts de cohésion s'exerçaient de proche en proche. Il semble alors naturel de supposer que ces efforts s'exercent au niveau de la surface de coupure Σ_t que l'on a créée par la pensée en isolant le sous-domaine ω_t : comme il s'agit, pour ainsi dire, d'efforts de contact entre deux domaines matériels, on suppose qu'ils peuvent être représentés par une densité surfacique d'efforts, d'où la définition suivante.

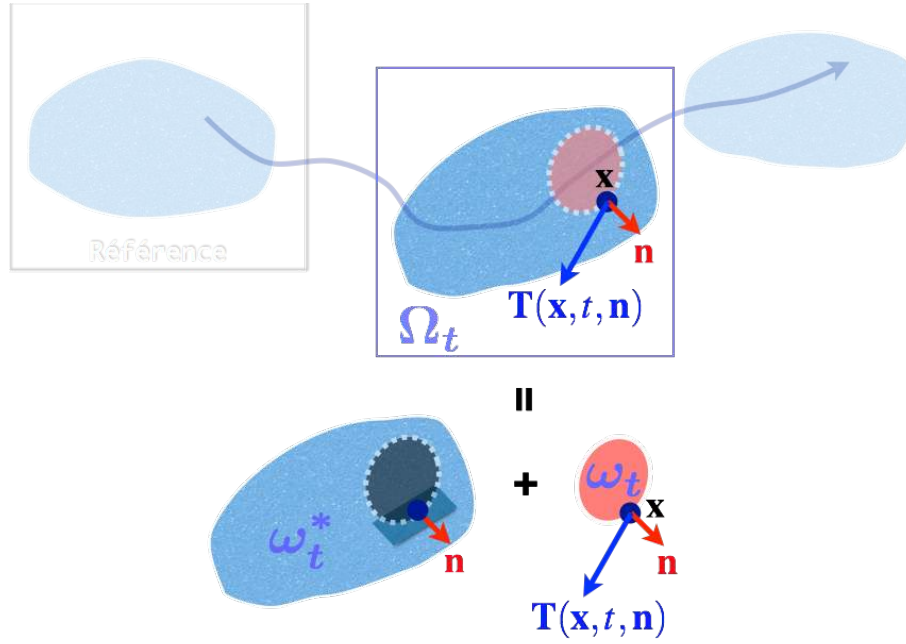


FIGURE 2.4 – Efforts intérieurs dans un domaine matériel.

Vecteur contrainte. On appelle vecteur contrainte la densité surfacique d'efforts $\mathbf{T}$ exercée sur le sous-domaine ω_t isolé, en tout point de la surface Σ_t de coupure virtuelle, par la partie complémentaire ω_t^* :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{f}_\Sigma(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_t, \text{ et } \mathbf{n} \perp \Sigma_t \text{ en } \mathbf{x}$$

Dans le cas général, cette densité dépend du point $\mathbf{x}$ considéré et du temps, mais aussi de l'orientation locale de la surface au point $\mathbf{x}$, représentée par le vecteur normal unitaire $\mathbf{n}$ sortant en $\mathbf{x}$ de ω_t , qui est perpendiculaire au plan tangent local (aussi appelé « facette »).

R Le fait de supposer a priori que le vecteur contrainte dépend de l'orientation locale de la surface de coupure permet de traduire le fait que, en un point donné, la matière n'est pas sollicitée de la même manière suivant la direction considérée.

En revanche, on considère que la courbure locale de la surface de coupure n'a pas d'influence sur la description des efforts intérieurs, et que l'on peut donc se contenter de l'orientation de la « facette », donnée par la direction de la normale $\mathbf{n}$ extérieure au domaine, au point considéré.

Prise en compte

Pour déterminer les efforts intérieurs que l'on vient de modéliser, il suffit de les faire intervenir dans les équations fondamentales de conservation dont on a donné le principe dans le paragraphe 2.1 : au lieu de considérer l'ensemble des particules matérielles constituant le domaine matériel Ω_t , on se limite à celles définissant le sous-domaine ω_t particulier que l'on suit au cours de son mouvement. Pour tout sous-domaine ω_t strictement contenu dans Ω_t , on obtient alors tout simplement :

$$\int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV_x = \int_{\omega_t} \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial \omega_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x, \quad \forall t$$

pour la conservation de la quantité de mouvement, et :

$$\int_{\omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV_x = \int_{\omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) dV_x + \int_{\partial \omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x, \quad \forall t$$

pour la conservation du moment cinétique.

Ces relations permettent de mettre en évidence le fait que, si l'on connaît le vecteur contrainte $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ en tout point de la surface de coupure Σ_t , on connaît la dynamique du sous-domaine ω_t , ce qui revient à dire que tout se passe comme si l'on avait pu découper Ω_t et enlever le complémentaire ω_t^* sans que le mouvement de ω_t en soit affecté. Bien sûr, si, à l'inverse, on choisit de garder ω_t^* et de supprimer par la pensée ω_t , on peut appliquer les mêmes relations, en prenant cette fois-ci la normale opposée au niveau de la facette, et ainsi le vecteur contrainte $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})$.

En outre, on constate que l'on a défini des efforts intérieurs qui sont, par essence, locaux puisqu'ils dépendent du point considéré, comme peuvent l'être les efforts volumiques qui s'exercent au sein du domaine matériel. Ainsi, si les deux principes de conservation appliqués au domaine matériel complet ne permettent d'obtenir que six équations scalaires, le fait de les appliquer pour un sous-domaine arbitraire permet de mettre en évidence que la répartition des efforts intérieurs joue un rôle essentiel dans l'évolution du milieu déformable considéré. C'est d'ailleurs la démarche adoptée dans ce qui suit afin de préciser la forme du vecteur contrainte $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$.

R Comme on l'a vu dans l'exemple 1.3 (page 6), le mouvement dans l'espace d'un solide indéformable est caractérisé par six paramètres. On vient d'évoquer que l'application des deux principes de conservation au domaine matériel complet permet d'obtenir six équations scalaires indépendantes, qui sont donc suffisantes pour déterminer l'évolution des six paramètres du mouvement du solide au cours du temps. Il n'est ainsi pas nécessaire de s'intéresser aux efforts intérieurs dans le cas d'un solide indéformable, vu que la répartition spatiale de ces derniers ne joue aucun rôle sur le mouvement de ce dernier.

2.2.2 Tenseur des contraintes

On va s'attacher ici à préciser la dépendance du vecteur contrainte $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ vis-à-vis de l'orientation de la normale $\mathbf{n}$ au niveau de la surface de coupure en $\mathbf{x}$. Pour cela, on va appliquer le principe de la conservation de la quantité de mouvement à deux sous-domaines de formes très particulières.

Principe d'action-réaction

On considère dans un premier temps des sous-domaines ω_t^h élémentaires, de forme cylindrique, au voisinage d'un point $\mathbf{x}_O$ donné, comme représenté sur la figure 2.5.

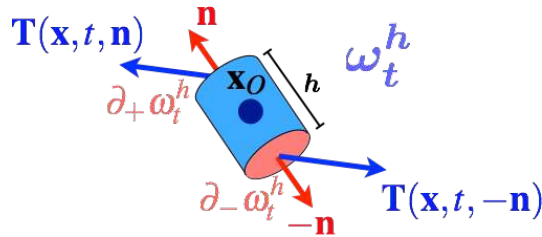


FIGURE 2.5 – Équilibre dynamique d'un cylindre élémentaire.

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit naturellement comme :

$$\int_{\omega_t^h} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t)) dV_x = \int_{\partial \omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x, \quad \forall t$$

Comme les deux intégrandes sont des fonctions continues de l'espace, le théorème de la moyenne permet alors d'affirmer qu'il existe pour chaque intégrale un point du domaine d'intégration tel que la valeur de l'intégrande en ce point est égal à l'intégrale divisée par l'aire ou le volume du domaine d'intégration. Ainsi, pour le membre de gauche, il existe $\mathbf{x}_V \in \omega_t^h$ tel que :

$$\int_{\omega_t^h} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t)) dV_x = \pi R^2 h (\rho(\mathbf{x}_V, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}_V, t) - \mathbf{f}_V(\mathbf{x}_V, t))$$

où R et h sont respectivement le rayon et la hauteur du domaine cylindrique. Par ailleurs, on peut décomposer le membre de droite en trois intégrales surfaciques correspondant aux trois faces du cylindre :

$$\int_{\partial\omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x = \int_{\partial_L\omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x + \int_{\partial_+\omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x + \int_{\partial_-\omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x$$

où $\partial_L\omega_t^h$, $\partial_+\omega_t^h$ et $\partial_-\omega_t^h$ sont respectivement les surfaces latérale, supérieure et inférieure du cylindre. En appliquant le théorème de la moyenne à chacune de ces intégrales, on conclut qu'il existe $\mathbf{x}_L \in \partial_L\omega_t^h$, $\mathbf{x}_+ \in \partial_+\omega_t^h$ et $\mathbf{x}_- \in \partial_-\omega_t^h$ tels que :

$$\int_{\partial_L\omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x + \int_{\partial_+\omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x + \int_{\partial_-\omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x = 2\pi R h \mathbf{T}(\mathbf{x}_L, t, \mathbf{n}_L) + \pi R^2 (\mathbf{T}(\mathbf{x}_+, t, \mathbf{n}) + \mathbf{T}(\mathbf{x}_-, t, -\mathbf{n}))$$

où $\mathbf{n}_L$, $\mathbf{n}$ et $-\mathbf{n}$ sont les normales sortantes à la surface du cylindre, en $\mathbf{x}_L$, $\mathbf{x}_+$ et $\mathbf{x}_-$ respectivement. Si l'on utilise les coordonnées cylindriques pour exprimer que $\mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_O + (h/2)\mathbf{n} + r_+\mathbf{i}_r(\theta_+)$ et $\mathbf{x}_- = \mathbf{x}_O - (h/2)\mathbf{n} + r_-\mathbf{i}_r(\theta_-)$, puis si l'on fait tendre la hauteur h du cylindre vers zéro, on obtient finalement que :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_O + r_+\mathbf{i}_r(\theta_+), t, \mathbf{n}) + \mathbf{T}(\mathbf{x}_O + r_-\mathbf{i}_r(\theta_-), t, -\mathbf{n}) = \mathbf{0}$$

En supposant enfin que le cylindre a un rayon suffisamment petit pour pouvoir considérer dans un dernier temps que $\mathbf{x}_O + r_+\mathbf{i}_r(\theta_+) \approx \mathbf{x}_O \approx \mathbf{x}_O + r_-\mathbf{i}_r(\theta_-)$, on obtient finalement :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_O, t, -\mathbf{n}) = -\mathbf{T}(\mathbf{x}_O, t, \mathbf{n}), \forall \mathbf{x}_O \in \Omega_t, \forall t$$

qui constitue le principe d'action-réaction, ou encore des actions réciproques.

Physiquement, ce résultat peut également s'interpréter comme une conséquence de la troisième loi de Newton : en effet, au niveau de la coupure qui permet d'isoler par la pensée le sous-domaine ω_t de son complémentaire ω_t^* , les particules matérielles qui sont en interaction deux à deux exercent l'une sur l'autre des efforts qui sont directement opposés. Ceci permet ainsi de conclure que le vecteur contrainte est antisymétrique par rapport à la normale $\mathbf{n}$.

Linéarité du vecteur contrainte

On considère dans un second temps des sous-domaines ω_t^h élémentaires, de forme tétraédrique, au voisinage d'un point $\mathbf{x}_O$ donné ; chacun de ces tétraèdres est droit, avec trois de ses arêtes orientées selon les vecteurs d'une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, comme représenté sur la figure 2.6. En posant (n_1, n_2, n_3) les composantes dans cette base de la normale sortante $\mathbf{n}$ à la face « oblique », et h la hauteur du tétraèdre selon cette normale, on déduit les caractéristiques de la géométrie :

- les trois arêtes parallèles aux vecteurs de la base ont pour longueurs $\frac{h}{n_k}$;
- les faces « latérales » $\partial_k\omega_t^h$, engendrées notamment par ces arêtes, ont pour normales sortantes $-\mathbf{i}_k$, et pour aires respectives $\frac{h^2}{2n_i n_j}$, $i \neq j \neq k$;
- la face « oblique » $\partial_n\omega_t^h$, de normale sortante $\mathbf{n}$, a pour aire $\frac{h^2}{2n_1 n_2 n_3}$;
- le tétraèdre a pour volume $\frac{h^3}{6n_1 n_2 n_3}$.

Comme pour le paragraphe précédent, on applique le théorème de la moyenne à chaque intégrale présente dans l'expression de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\int_{\omega_t^h} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t)) dV_x = \int_{\partial_n\omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x + \sum_{k=1}^3 \int_{\partial_k\omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{i}_k) dS_x, \forall t$$

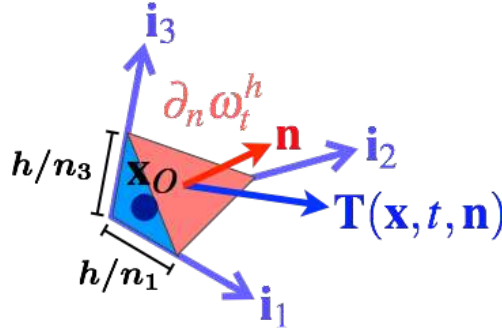


FIGURE 2.6 – Équilibre dynamique d'un tétraèdre élémentaire (« tétraèdre de Cauchy »).

Ainsi, pour le membre de gauche, il existe $\mathbf{x}_V \in \omega_t^h$ tel que :

$$\int_{\omega_t^h} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t)) dV_x = \frac{h^3}{6n_1 n_2 n_3} (\rho(\mathbf{x}_V, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}_V, t) - \mathbf{f}_V(\mathbf{x}_V, t))$$

tandis que, pour chaque intégrale du membre de droite, il existe $\mathbf{x}_k \in \partial_k \omega_t^h$ ($1 \leq k \leq 3$) et $\mathbf{x}_n \in \partial_n \omega_t^h$ tels que :

$$\begin{aligned} \int_{\partial_n \omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dS_x &= \frac{h^2}{2n_1 n_2 n_3} \mathbf{T}(\mathbf{x}_n, t, \mathbf{n}) \\ \int_{\partial_k \omega_t^h} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{i}_k) dS_x &= \frac{h^2}{2n_i n_j} \mathbf{T}(\mathbf{x}_k, t, -\mathbf{i}_k), \quad i \neq j \neq k \end{aligned}$$

En faisant tendre la hauteur h vers zéro, on constate que l'intégrale volumique, en h^3 , devient négligeable devant la somme des intégrales surfaciques, qui sont toutes en h^2 . En outre, en approximant alors $\mathbf{x}_n \approx \mathbf{x}_O \approx \mathbf{x}_k$ (pour $1 \leq k \leq 3$), on détermine alors que :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_O, t, \mathbf{n}) + \sum_{k=1}^3 n_k \mathbf{T}(\mathbf{x}_O, t, -\mathbf{i}_k) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x}_O \in \Omega_t$$

soit, en utilisant le principe d'action-réaction :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_O, t, \mathbf{n}) = \sum_{k=1}^3 n_k \mathbf{T}(\mathbf{x}_O, t, \mathbf{i}_k), \quad \forall \mathbf{x}_O \in \Omega_t, \quad \forall t$$

ce qui revient à dire que le vecteur contrainte dépend linéairement de la normale sortante $\mathbf{n}$ à la facette, au niveau de la coupure considérée.

R *Le raisonnement effectué précédemment sur le tétraèdre élémentaire n'est, en toute rigueur, pas suffisant pour conclure. En effet, avec une telle géométrie, il n'est pas possible d'avoir une normale $\mathbf{n} = \pm \mathbf{i}_j$, vecteur de la base. Cependant, dans ce cas, la relation établie est encore vérifiée car on a $n_j = \pm 1$ et $n_k = 0$ pour $k \neq j$.*

Représentation mathématique

Afin de tirer profit des résultats précédents, on introduit le tenseur des contraintes de Cauchy, défini comme suit.

Tenseur des contraintes de Cauchy. On appelle tenseur des contraintes de Cauchy le tenseur σ défini à l'aide de la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ comme :

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{i}_k) \otimes \mathbf{i}_k, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t$$

où $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{i}_k)$ est le vecteur contrainte au même point et au même instant, pour une facette de normale unitaire $\mathbf{i}_k$. Le vecteur contrainte selon une normale $\mathbf{n}$ donnée s'exprime alors comme l'image du vecteur $\mathbf{n}$ par l'application linéaire représentée par σ :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \sigma(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} = \sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{n}, \mathbf{i}_k \rangle \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{i}_k), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t, \quad \forall \mathbf{n}$$

Par conséquent, dans cette même base, les composantes du tenseur des contraintes s'expriment simplement comme :

$$\sigma_{mn} = \langle \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{i}_n), \mathbf{i}_m \rangle, \quad 1 \leq m, n \leq 3$$

Physiquement, ceci signifie qu'il suffit de connaître au point $\mathbf{x}$ et à l'instant t le vecteur contrainte sur trois facettes de normales linéairement indépendantes pour connaître le tenseur des contraintes, et, par conséquent, le vecteur contrainte (au même point et au même instant) relatif à une facette de normale $\mathbf{n}$ quelconque. La figure 2.7 permet de résumer ceci dans le cas où l'on choisit les trois facettes comme trois faces d'un cube élémentaire centré en $\mathbf{x}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on parle simplement de tenseur des contraintes, sans être plus précis.

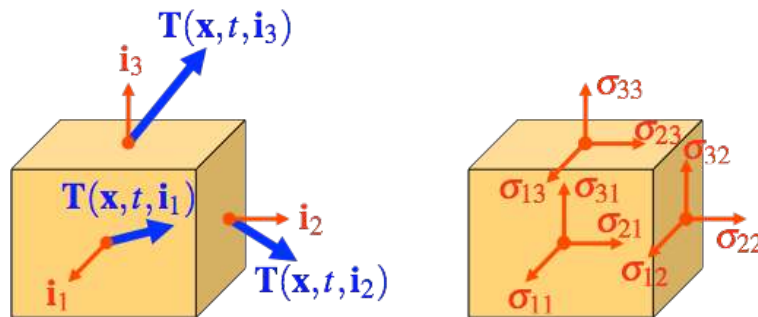
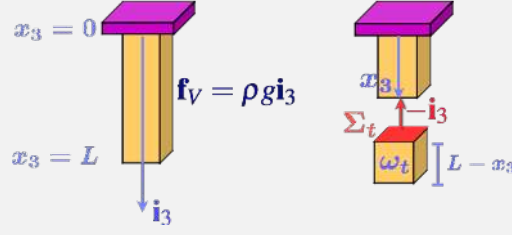


FIGURE 2.7 – Vecteur contrainte et composantes du tenseur des contraintes sur un cube élémentaire.

Compte tenu de la définition précédente, et de la modélisation proposée pour les efforts intérieurs, les contraintes sont homogènes à des densités d'efforts surfaciques, et s'expriment donc en N/m^2 ou en Pa . En pratique, comme la pression atmosphérique au sein d'un gaz est de l'ordre d'un bar, soit $0,1 \text{ MPa}$, pour la plupart des milieux déformables que l'on peut étudier, on retient typiquement l'ordre du MPa (ou N/mm^2), avec des contraintes qui peuvent évoluer jusqu'à plusieurs centaines (voire milliers) de MPa sans qu'il y ait rupture pour les matériaux les plus résistants. Le chapitre suivant sera consacré aux critères qui permettent d'apprécier cette résistance.

■ **Exemple 2.2 — Barre soumise à l'action de la pesanteur : approche globale.** On considère une barre en forme de parallélépipède rectangle, dont la face supérieure est attachée à un bâti rigide et fixe, et qui, soumise à l'action de la pesanteur, ainsi qu'à l'action du bâti, est en équilibre statique. On note $\mathbf{i}_3$ le vecteur vertical unitaire (que l'on oriente vers le bas par souci de simplicité), de sorte que la face supérieure est en $x_3 = 0$, et la face inférieure est en $x_3 = L$, comme précisé sur la figure ci-dessous. On suppose en outre que la masse volumique est

uniforme dans toute la poutre.



On peut alors couper par la pensée cette poutre au niveau d'un plan Σ_t d'altitude x_3 donnée, de façon à pouvoir isoler le tronçon ω_t des points dont les altitudes sont comprises entre x_3 et L . Ce tronçon est en équilibre statique grâce à l'action de la partie complémentaire ω_t^* au niveau du plan Σ_t , qui compense l'action de la pesanteur, soit, en termes de résultantes :

$$\int_{\Sigma_t} \sigma(-\mathbf{i}_3) dS_x + \int_{\omega_t} \rho g \mathbf{i}_3 dV_x = \mathbf{0}$$

où le vecteur contrainte au niveau de Σ_t est exprimé à l'aide de la normale $-\mathbf{i}_3$ sortant de ω_t au niveau de la coupure.

Si l'on fait l'hypothèse simplificatrice consistant à supposer que le vecteur contrainte $\sigma(-\mathbf{i}_3)$ ne dépend que de l'altitude x_3 , et est par conséquent uniforme sur toute la surface de coupure Σ_t (ceci sera justifié dans l'exemple 2.9), on aboutit alors à :

$$\sigma(-\mathbf{i}_3)A + \rho g(L - x_3)A\mathbf{i}_3 = \mathbf{0}$$

où A est l'aire de la surface de coupure ; ainsi, la résultante des efforts intérieurs vient, comme attendu, compenser exactement le poids du tronçon isolé, qui est de hauteur $L - x_3$. On en déduit finalement que :

$$\sigma(x_3)\mathbf{i}_3 = \rho g(L - x_3)\mathbf{i}_3, \quad \forall x_3 \in]0, L[$$

ou, en termes de composantes dans la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ représentée plus bas :

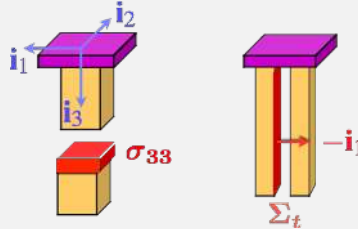
$$\sigma_{13}(x_3) = 0 = \sigma_{23}(x_3), \quad \text{et} \quad \sigma_{33}(x_3) = \rho g(L - x_3), \quad \forall x_3 \in]0, L[$$

La composante σ_{33} étant positive, on parle alors de contrainte de traction, indiquant ainsi que la contrainte tend à étirer localement le matériau. Cette contrainte est maximale en $x_3 = 0$, et correspond à la force surfacique que doit exercer localement le support fixe pour maintenir la poutre en équilibre statique.

Par ailleurs, on peut envisager d'autres coupures, par exemple selon un plan vertical de normale $\mathbf{i}_1$. Ainsi, sur l'isolement représenté ci-dessous, à droite, la normale sortante est $-\mathbf{i}_1$, et l'équilibre du sous-domaine ω_t permet d'établir que :

$$\int_{\Sigma_t} \sigma(-\mathbf{i}_1) dS_x = \mathbf{0}$$

car la réaction du support en $x_3 = 0$ compense exactement l'action de la pesanteur. En outre, en isolant des sous-domaines analogues au précédent, mais compris entre les plans d'altitude x_3 et L , on peut déduire que $\sigma(x_3)\mathbf{i}_1 = \mathbf{0}$, $\forall x_3 \in]0, L[$. Physiquement, on se rend compte sur la figure ci-dessous (à droite) que tout se passe comme si l'on avait deux demi-barres suspendues côte à côte : pour chacune d'elles, c'est l'action du support en $x_3 = 0$ qui permet de compenser l'action de la pesanteur, et il n'est donc pas nécessaire que les deux demi-barres exercent un effort l'une sur l'autre, et vice-versa. Ce résultat sera retrouvé de façon rigoureuse dans l'exemple 2.9.



En termes de composantes dans la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, on obtient alors que :

$$\sigma_{11}(x_3) = \sigma_{21}(x_3) = \sigma_{31}(x_3) = 0, \quad \forall x_3 \in]0, L[$$

Enfin, de façon analogue en considérant des coupures selon un plan vertical de normale $\mathbf{i}_2$, on peut établir que :

$$\sigma_{12}(x_3) = \sigma_{22}(x_3) = \sigma_{32}(x_3) = 0, \forall x_3 \in]0, L[$$

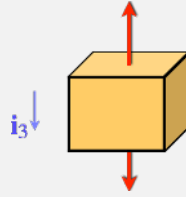
Le tenseur des contraintes s'exprime donc finalement comme :

$$\boldsymbol{\sigma}(x_3) = \rho g(L - x_3) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$$

soit, dans une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$:

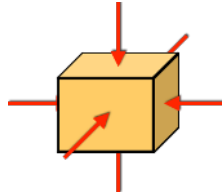
$$\boldsymbol{\sigma}(x_3) = \rho g(L - x_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)}$$

ce qui peut aussi se représenter à l'aide du cube élémentaire, défini sur la figure 2.7, comme ci-dessous :



représentation qui justifie le qualificatif d'« uniaxial » donné à cet état de contrainte. ■

R La figure 2.7 a permis de visualiser qu'au niveau d'une facette de coupure, la direction du vecteur contrainte est a priori quelconque, et donc n'est pas nécessairement normale à cette facette. En cela, la notion de contrainte généralise la notion de pression telle qu'on la rencontre dans un fluide au repos : en effet, dans ce cas, le vecteur contrainte est normal à la facette, en prenant la forme $\mathbf{T} = -p\mathbf{n}$ (où p est la pression du fluide, qui dépend de l'espace et du temps a priori), d'où la représentation suivante à l'aide du cube élémentaire :



Le tenseur des contraintes s'écrit alors simplement comme $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbb{I}$; compte tenu de sa proportionnalité au tenseur identité $\mathbb{I}$, on qualifie alors le tenseur des contraintes d'« isotrope », ou encore de « sphérique ».

■ **Exemple 2.3 — Poussée d'Archimède : approche globale.** On va déterminer ici l'expression de la poussée (dite d'Archimède) qu'un fluide exerce sur un solide immergé. Pour cela, commençons par isoler dans le fluide un sous-domaine ω_t de forme quelconque ; son équilibre (statique) en résultante s'écrit alors comme :

$$\int_{\omega_t} \rho_f g \mathbf{i}_3 dV_x + \int_{\partial\omega_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS_x = \mathbf{0}$$

où $\mathbf{i}_3$ est le vecteur vertical (unitaire) orienté vers le bas, et ρ_f la masse volumique du fluide ; comme $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbb{I}$, avec p la pression du fluide, on obtient ainsi :

$$-\int_{\partial\omega_t} p \mathbf{n} dS_x = -\left(\int_{\omega_t} \rho_f dV_x\right) g \mathbf{i}_3 = -m_f g \mathbf{i}_3$$

où m_f est la masse du sous-domaine fluide ω_t . L'action du complémentaire ω_t^* de ω_t dans Ω_t permet donc de compenser l'action de la pesanteur sur le sous-domaine ω_t , de façon à ce que ce dernier reste en équilibre.

Si l'on considère maintenant un solide totalement immergé, dont l'« emprise » spatiale correspond exactement au sous-domaine fluide ω_t que l'on vient de considérer, on peut supposer, comme le complémentaire ω^* est toujours au repos, que le solide immergé exerce exactement la même action sur ω^* que celle qui était exercée par ω_t . Du fait du principe d'action-réaction, on peut donc conclure que l'action du fluide ω_t^* , au travers des forces de pression, sur

le solide est de résultante $\mathbf{R}^f$ telle que :

$$\mathbf{R}^f = - \int_{\partial\omega_t} p \mathbf{n} dS_x = -m_f g \mathbf{i}_3$$

ce qui montre que la poussée d'Archimède exercée sur le solide est égal au poids du volume de fluide « déplacé », c'est-à-dire le poids correspondant à un volume $|\omega_t|$ de fluide. ■

Propriété de symétrie

Jusqu'ici, nous n'avons utilisé que la conservation de la quantité de mouvement comme moyen de détermination du tenseur des contraintes. Il est bien sûr possible *a priori* d'obtenir des informations supplémentaires de l'application de la conservation du moment cinétique à tout sous-domaine ω_t contenu dans le domaine Ω_t .

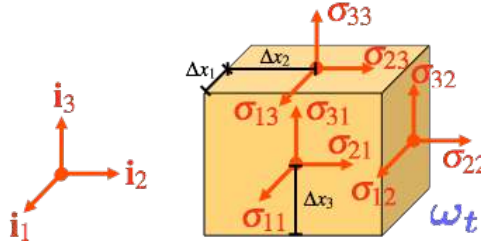


FIGURE 2.8 – Équilibre en moment d'un parallélépipède rectangle élémentaire.

Ainsi, si l'on considère un sous-domaine élémentaire ω_t en forme de parallélépipède rectangle, centré sur un point $\mathbf{x}_O$, la conservation du moment cinétique au point O permet d'écrire que :

$$\int_{\omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge (\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V) dV_x = \int_{\partial\omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS_x$$

Comme dans le cas de l'équilibre dynamique du tétraèdre de Cauchy, considéré plus haut, on peut établir que l'on peut négliger, dans l'expression précédente, l'intégrale volumique par rapport à l'intégrale surfacique, et que cette dernière peut être approximée comme :

$$\mathbf{0} = \int_{\partial\omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS_x \approx \sum_{k=1}^3 \Delta x_{i \neq k} \Delta x_{j \neq k} \Delta x_k \mathbf{i}_k \wedge \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_O, t) \mathbf{i}_k$$

avec les notations de la figure 2.8. En explicitant dans cet équilibre en moment les vecteurs contraintes à l'aide des composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, on trouve alors que :

$$\sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k \wedge (\sigma_{1k} \mathbf{i}_1 + \sigma_{2k} \mathbf{i}_2 + \sigma_{3k} \mathbf{i}_3) = \mathbf{0}$$

soit, en développant :

$$(\sigma_{32} - \sigma_{23}) \mathbf{i}_1 + (\sigma_{13} - \sigma_{31}) \mathbf{i}_2 + (\sigma_{21} - \sigma_{12}) \mathbf{i}_3 = \mathbf{0}$$

ce qui montre la symétrie du tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_O, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_O, t)^T, \quad \forall \mathbf{x}_O \in \Omega_t, \quad \forall t$$

Par conséquent, l'existence d'une composante tangentielle (selon une direction $\mathbf{t}$) du vecteur contrainte sur une facette d'orientation $\mathbf{n}$ donnée implique nécessairement, au même point, une composante tangentielle de direction $\mathbf{n}$ et de même intensité sur une facette d'orientation $\mathbf{t}$. Cet état de contrainte, qualifié de cisaillement pur, est représenté sur la figure 2.9.

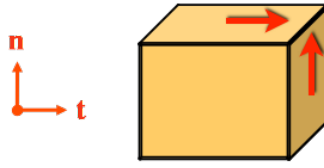


FIGURE 2.9 – Cisaillement pur.

R Ce résultat est une conséquence directe du fait d'avoir modélisé les actions à l'intérieur du domaine comme des densités volumiques de forces uniquement. Dans certains cas, ceci peut être insuffisant : en magnétohydrodynamique par exemple, où les écoulements de gaz ionisés sont couplés avec des effets magnétiques, il est nécessaire d'introduire des densités volumiques de couple $\mathbf{c}_V$ en chaque point du domaine, ce qui a pour conséquence d'obtenir les relations suivantes entre les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k \wedge (\sigma_{1k} \mathbf{i}_1 + \sigma_{2k} \mathbf{i}_2 + \sigma_{3k} \mathbf{i}_3) + \mathbf{c}_V = \mathbf{0}$$

en tout point du domaine. Le tenseur des contraintes n'est alors pas symétrique [Sad14; Sal05].

Résumé 2.4 — Tenseur des contraintes (de Cauchy). Le tenseur des contraintes est le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ qui permet d'exprimer, en tout point d'un domaine matériel Ω_t , et à tout instant, les efforts intérieurs pour une facette de normale $\mathbf{n}$ unitaire comme le vecteur contrainte :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t$$

À l'aide d'une base orthonormée $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ et de la connaissance de ces efforts intérieurs sur trois facettes de normales respectives $\mathbf{i}_k$, on peut exprimer ce tenseur comme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{i}_k) \otimes \mathbf{i}_k, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t$$

En outre, dans le cadre proposé dans ce cours, le tenseur des contraintes est symétrique :

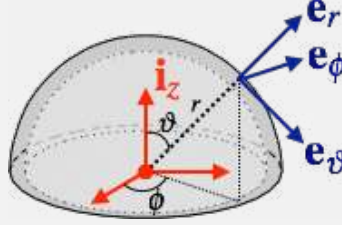
$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)^T, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t$$

■ **Exemple 2.4 — Réservoir sphérique sous pression : approche globale.** On considère ici le cas d'une enveloppe sphérique, de rayon intérieur R et d'épaisseur e , analogue à l'illustration ci-dessous, et dont la fonction est de contenir du gaz sous pression. On cherche à estimer les contraintes au sein de ce réservoir, dans le cas courant où son épaisseur est très petite devant son rayon ($e \ll R$), et dans l'hypothèse où la pression du gaz p peut être considérée comme uniforme.



On suppose en outre que l'action de la pesanteur est négligeable devant l'action de la pression interne p , de sorte que l'on peut considérer que cette dernière est la seule action agissant sur le réservoir (l'action du support sur le réservoir étant, de fait, elle aussi négligée).

On se propose d'isoler le demi-réservoir « haut », obtenu après coupure de la structure selon un plan horizontal passant par son centre ; on se place alors dans la base sphérique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\phi)$ associée aux coordonnées (r, ϑ, ϕ) .



Compte tenu de la symétrie sphérique de la géométrie et des sollicitations (la pression du fluide est uniforme et s'exerce normalement sur la surface intérieure du réservoir), on peut supposer que les composantes du tenseur des contraintes sont indépendantes des angles ϑ et ϕ , et que les vecteurs $\mathbf{e}_\vartheta$ et $\mathbf{e}_\phi$ jouent des rôles analogues. On peut ainsi écrire le tenseur des contraintes comme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(r, \vartheta, \phi) = & \sigma_{rr}(r) \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) + \sigma_{\vartheta\vartheta}(r) \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) + \sigma_{\phi\phi}(r) \mathbf{e}_\phi(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_\phi(\vartheta, \phi) \\ & + 2\sigma_{r\vartheta}(r) \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) + 2\sigma_{r\phi}(r) \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_\phi(\vartheta, \phi) \\ & + 2\sigma_{\vartheta\phi}(r) \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_\phi(\vartheta, \phi) \end{aligned}$$

avec $\sigma_{\vartheta\vartheta}(r) = \sigma_{\phi\phi}(r)$ et $\sigma_{r\vartheta}(r) = \sigma_{r\phi}(r)$, $\forall r$, et où $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})/2$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Comme le plan de coupure est $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)$, l'équilibre statique du demi-réservoir s'écrit alors comme :

$$\mathbf{0} = \int_{\Sigma_i \cup \Sigma_e \cup \Sigma_0} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS_x = \int_{\Sigma_i} \boldsymbol{\sigma} (-\mathbf{e}_r) dS_x + \int_{\Sigma_e} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_r dS_x + \int_{\Sigma_0} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_\vartheta dS_x$$

où Σ_i désigne la surface intérieure en contact avec le fluide sous pression, Σ_e la surface extérieure sous pression atmosphérique (considérée nulle), et Σ_0 la surface de coupure, de normale sortante $\mathbf{e}_\vartheta$. En faisant l'approximation que le vecteur contrainte sur cette dernière est uniforme compte tenu de la très faible épaisseur du réservoir, on établit alors que :

$$\mathbf{0} = p \int_{\Sigma_i} \mathbf{e}_r dS_x + A_0 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_\vartheta$$

où $A_0 \approx 2\pi R e$ est l'aire de la surface de coupure quand on suppose $e \ll R$. Compte tenu des symétries, et du fait que, sur Σ_0 , $\mathbf{e}_\vartheta = -\mathbf{i}_z$ (avec $\mathbf{i}_z$ unitaire et vertical, orienté vers le haut), il est facile de montrer que :

$$\int_{\Sigma_i} \mathbf{e}_r dS_x = \pi R^2 \mathbf{i}_z$$

où πR^2 correspond à ce que l'on appelle l'aire projetée de Σ_i perpendiculairement à $\mathbf{i}_z$. On trouve ainsi que, pour $e \ll R$:

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} \approx \frac{pR}{2e}$$

et que les contraintes de cisaillement $\sigma_{r\vartheta}$ et $\sigma_{\vartheta\phi}$ sont nulles dans l'épaisseur.

Afin de déterminer la contrainte radiale, on peut cette fois-ci isoler une « portion » circonférencielle du demi-réservoir : $\omega_t^p = \{\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) | R + \rho \leq r \leq R + e, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2\}$, avec $0 < \rho < e$. L'équilibre statique en résultante nous donne :

$$\mathbf{0} = \int_{\Sigma_p \cup \Sigma_e \cup \Sigma_0} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS_x = \int_{\Sigma_p} \boldsymbol{\sigma} (-\mathbf{e}_r) dS_x + \int_{\Sigma_e} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_r dS_x + \int_{\Sigma_0^*} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_\vartheta dS_x$$

où Σ_p est la surface de coupure circonférencielle ($r = R + \rho$), et Σ_0^* la surface de coupure diamétrale. On trouve alors :

$$0 = \pi(R + \rho)^2 \sigma_{rr}(R + \rho) + A_0^* \sigma_{\vartheta\vartheta}$$

avec $A_0^* \approx 2\pi R(e - \rho)$ quand $e \ll R$. On trouve finalement :

$$\sigma_{rr}(R + \rho) \approx -p \frac{R^2(e - \rho)}{e(R + \rho)^2} \approx p \frac{\rho - e}{e}$$

soit une évolution linéaire de la contrainte radiale dans l'épaisseur, quand $e \ll R$.

Finalement, moyennant quelques hypothèses simplificatrices, on aboutit ainsi au tenseur des contraintes suivant dans le cas d'un réservoir à paroi mince :

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \vartheta, \phi) = p \frac{r-R-e}{e} \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) + \frac{pR}{2e} (\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) + \mathbf{e}_\phi(\phi) \otimes \mathbf{e}_\phi(\phi))$$

On constate en outre que ce sont les contraintes circonférencielles qui sont prépondérantes dans l'épaisseur, vu que $p = |\sigma_{rr}|_{\max} \ll \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\phi\phi} = \frac{pR}{2e}$ quand $e \ll R$. ■

2.3 Équation d'équilibre local

On a vu précédemment comment modéliser les efforts intérieurs au sein d'un domaine matériel, et qu'il était possible de les estimer en appliquant la conservation de la quantité de mouvement à des sous-domaines que l'on isole par la pensée. Toutefois, cette estimation à l'aide de l'écriture d'équilibres dynamiques globaux peut s'avérer complexe à mettre en œuvre, vu qu'elle demande de choisir de façon pertinente les sous-domaines à isoler ; c'est pourquoi en pratique on préfère utiliser comme alternative une équation d'équilibre local, vérifiée en tout point à l'intérieur du domaine matériel.

2.3.1 Obtention de l'équation

Le point de départ consiste, comme précédemment, à écrire la conservation de la quantité de mouvement pour un sous-domaine ω_t de Ω_t :

$$\int_{\omega_t} (\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V) dV_x = \int_{\partial\omega_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS_x$$

où l'on a remplacé le vecteur contrainte par son expression à l'aide du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et de la normale $\mathbf{n}$ sortante unitaire en tout point de la frontière. Afin d'aboutir à une formulation locale, formellement, on souhaiterait prendre un sous-domaine ω_t autour d'un point $\mathbf{x}_O$, dont on réduirait la taille de façon à pouvoir assimiler l'intégrale volumique à la valeur de l'intégrande au point $\mathbf{x}_O$. Ceci nécessite au préalable de transformer l'intégrale surfacique sur la frontière de ω_t en une intégrale volumique. Pour cela, on considère le produit scalaire de la relation précédente par un vecteur $\mathbf{c}$ constant et arbitraire :

$$\int_{\omega_t} \langle \rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V, \mathbf{c} \rangle dV_x = \int_{\partial\omega_t} \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \mathbf{c} \rangle dS_x$$

soit encore, en utilisant la propriété de transposition du produit scalaire :

$$\int_{\omega_t} \langle \rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V, \mathbf{c} \rangle dV_x = \int_{\partial\omega_t} \langle \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{c}, \mathbf{n} \rangle dS_x$$

En utilisant la formule de la divergence, donnée dans l'annexe B.2.2, on peut alors transformer l'intégrale surfacique sur la frontière de ω_t en une intégrale volumique sur le sous-domaine :

$$\int_{\omega_t} \langle \rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V, \mathbf{c} \rangle dV_x = \int_{\omega_t} \text{div}_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{c}) dV_x$$

où $\text{div}_{\mathbf{x}}$ est l'opérateur de divergence pour un vecteur exprimé dans la configuration actuelle. Comme l'intégrande du terme de droite est linéaire par rapport à $\mathbf{c}$, on introduit alors, pour poursuivre le raisonnement, la définition suivante.

Divergence du tenseur des contraintes. On appelle divergence du tenseur des contraintes (exprimée dans la configuration actuelle) le vecteur, noté $\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}$, défini par :

$$\langle \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{c} \rangle = \text{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{c}), \quad \forall \mathbf{c} \text{ constant}$$

En choisissant successivement pour $\mathbf{c}$ les vecteurs d'une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, on obtient alors les composantes dans cette dernière du vecteur divergence, en utilisant l'expression bien connue de la divergence d'un vecteur (rappelée en annexe B.1.1) :

$$\langle \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{i}_m \rangle = \text{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{i}_m) = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \langle \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_n \rangle}{\partial x_n} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial x_n}, \quad 1 \leq m \leq 3$$

où (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées cartésiennes associées à la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, et σ_{mn} sont les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ dans cette dernière. Ainsi, en coordonnées cartésiennes, les composantes du vecteur divergence du tenseur des contraintes se calcule formellement comme les divergences (scalaires) des vecteurs lignes de la matrice associée.

En outre, cette définition permet de définir ce que l'on appelle la formule de Stokes généralisée :

$$\int_{\partial \omega_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS_t = \int_{\omega_t} \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dV_t$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est la normale sortante unitaire en tout point de la frontière.

En substituant la définition précédente dans l'équation d'équilibre dynamique, on obtient :

$$\int_{\omega_t} \langle \rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V - \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{c} \rangle dV_x = 0$$

relation qui est valable quel que soit le sous-domaine ω_t isolé à l'intérieur du domaine Ω_t . On peut alors en déduire que c'est l'intégrande qui s'annule, et ce, quel que soit le point considéré :

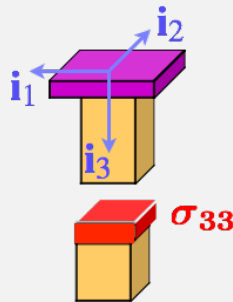
$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) + \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t$$

qui constitue l'équation d'équilibre local vérifiée par le tenseur des contraintes au sein du domaine matériel.

■ **Exemple 2.5 — Barre soumise à l'action de la pesanteur : vérification de l'équation d'équilibre local.** On reprend l'exemple 2.2 pour lequel on avait déterminé, moyennant quelques hypothèses de « bon sens », le tenseur des contraintes à l'intérieur d'une barre suspendue à un support, et soumise à l'action de la pesanteur :

$$\boldsymbol{\sigma}(x_3) = \rho g(L - x_3) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$$

avec les conventions de la figure ci-dessous.



Regardons maintenant si l'équation d'équilibre local est effectivement vérifiée ; pour cela, on calcule la divergence du tenseur σ dans la base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, comme la divergence des vecteurs lignes de σ :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{div}_x \sigma, \mathbf{i}_1 \rangle &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \langle \mathbf{div}_x \sigma, \mathbf{i}_2 \rangle &= \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \langle \mathbf{div}_x \sigma, \mathbf{i}_3 \rangle &= \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = -\rho g\end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\mathbf{div}_x \sigma + \mathbf{f}_V = -\rho g \mathbf{i}_3 + \rho g \mathbf{i}_3 = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x}$$

ce qui correspond effectivement à un état d'équilibre statique ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$). ■

R Une interprétation physique de la divergence du tenseur des contraintes est la suivante. Si l'on considère un parallélépipède rectangle élémentaire ω_t centré sur un point $\mathbf{x}$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans un repère cartésien $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, l'application de la formule de Stokes généralisée permet d'écrire que :

$$\int_{\omega_t} \mathbf{div}_x \sigma dV_t = \int_{\partial \omega_t} \sigma \mathbf{n} dS_t$$

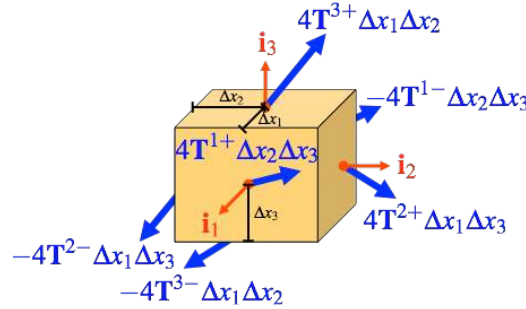
soit, pour un parallélépipède rectangle dont les dimensions $2\Delta x_k$ selon les directions respectives $\mathbf{i}_k$ deviennent très petites :

$$8\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \mathbf{div}_x \sigma(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{k=1}^3 4\Delta x_{i \neq k} \Delta x_{j \neq k} \left(\sigma(\mathbf{x} + \Delta x_k \mathbf{i}_k, t) \mathbf{i}_k + \sigma(\mathbf{x} - \Delta x_k \mathbf{i}_k, t) (-\mathbf{i}_k) \right)$$

ce qui permet d'obtenir, en posant, pour $1 \leq k \leq 3$, $\mathbf{T}^{k\pm} = \sigma(\mathbf{x} \pm \Delta x_k \mathbf{i}_k, t) \mathbf{i}_k$ le vecteur contrainte selon chaque vecteur de la base :

$$\mathbf{div}_x \sigma \approx \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2\Delta x_k} (\mathbf{T}^{k+} - \mathbf{T}^{k-})$$

comme représenté sur la figure ci-dessous, qui montre le bilan des résultantes des forces surfaciques sur les faces du parallélépipède.



La divergence du tenseur contrainte représente ainsi le bilan local des efforts surfaciques intérieurs qui s'appliquent au sein de la matière sur les faces du parallélépipède élémentaire, bilan qui s'exprime comme la variation du vecteur contrainte selon les trois directions associées à la base cartésienne.

■ **Exemple 2.6 — Poussée d'Archimède : approche locale.** On peut retrouver ici, avec l'équation d'équilibre local, le résultat à propos de la poussée d'Archimède, que l'on avait établi de façon globale et intuitive dans l'exemple 2.3. Compte tenu de la forme du tenseur des contraintes pour un fluide de masse volumique ρ_f au repos ($\sigma = -p\mathbb{I}$, où p est la pression du fluide), l'équation d'équilibre locale nous permet d'établir que :

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_v + \mathbf{div}_x(-p\mathbb{I}) = \rho_f g \mathbf{i}_3 - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_k} \mathbf{i}_k$$

dans le cas d'une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, où $\mathbf{i}_3$ est vertical (unitaire) orienté vers le bas. En posant $\nabla_x p$ le gradient de p , on obtient ainsi :

$$\nabla_x p = \rho_f g \mathbf{i}_3$$

Ce résultat traduit le fait, bien connu, d'une pression augmentant linéairement avec la profondeur (pour peu que la masse volumique ρ_f soit uniforme).

Si l'on considère maintenant un solide dont le domaine ω_t est totalement immergé dans le fluide, l'action exercée par ce dernier sur le solide se traduit par l'ensemble des forces de pression sur sa frontière extérieure $\partial\omega_t$, de résultante :

$$\mathbf{R}^f = - \int_{\partial\omega_t} p \mathbf{n} dS_x$$

où $\mathbf{n}$ est la normale sortant du solide en tout point de sa frontière extérieure. On utilise alors la formule du gradient, obtenue dans l'annexe B.2.2, et qui permet d'écrire que :

$$\int_{\partial\omega_t} p \mathbf{n} dS_x = \int_{\omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} p dV_x$$

On a ainsi relié la résultante de la pression évoluant sur une surface fermée à la résultante du gradient de cette dernière dans le volume contenu dans la surface considérée. Comme l'évolution de la pression au sein du fluide n'est pas influencée par la présence du solide, et vérifie donc le gradient établi plus haut, on peut tout simplement écrire que :

$$\mathbf{R}^f = - \int_{\omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} p dV_x = - \int_{\omega_t} \rho_f g \mathbf{i}_3 dV_x = -m_f g \mathbf{i}_3$$

où $m_f g$ est le poids correspondant à un volume $|\omega_t|$ de fluide.

Par ailleurs, il est facile de généraliser le résultat pour un solide partiellement immergé ; en effet, dans ce cas, la partie émergée est en fait soumise à la pression de l'air environnant, qui, en vertu de l'équation d'équilibre local, vérifie elle aussi un gradient de forme analogue. La démarche précédente permet alors d'obtenir de la même façon que, dans ce cas, la poussée d'Archimède vaut :

$$\mathbf{R}^f = -(m_f + m_a) g \mathbf{i}_3$$

où $m_f g$ est le poids correspondant à un volume de fluide égal au volume de solide immergé, et $m_a g$ est le poids correspondant à un volume d'air égal au volume de solide émergé. Comme, en pratique pour un liquide, $m_a g \ll m_f g$, la poussée d'Archimède s'exprime comme :

$$\mathbf{R}^f \approx -m_f g \mathbf{i}_3$$

d'où l'énoncé usuel consistant à affirmer que la poussée d'Archimède est égal au poids de liquide déplacé. ■

R Comme pour le cas de la conservation de la quantité de mouvement, il est possible de considérer de façon locale le principe de conservation du moment cinétique ; pour tout sous-domaine ω_t contenu dans le domaine Ω_t , on peut écrire que, en un point O fixe :

$$\int_{\omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge (\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V) dV_x = \int_{\partial\omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS_x$$

On utilise alors, pour transformer l'intégrale surfacique sur la frontière, une variante de la formule de Stokes, obtenue dans l'annexe B.2.2, à savoir, à l'aide d'une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$:

$$\int_{\partial\omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS_x = \int_{\omega_t} \left((\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \sum_{n=1}^3 \mathbf{i}_n \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{i}_n \right) dV_x$$

où l'on vérifie, en vertu de l'équation d'équilibre local :

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{a} - \mathbf{f}_V$$

Après simplification, on obtient alors :

$$\int_{\partial\omega_t} \sum_{n=1}^3 \mathbf{i}_n \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{i}_n dV_x = \mathbf{0}$$

Sachant que cette relation est vraie quel que soit le sous-domaine matériel ω_t isolé, l'intégrande est en fait nul en tout point du domaine Ω_t . En développant les expressions des vecteurs contraintes à l'aide des composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, on arrive à :

$$\mathbf{0} = \sum_{n=1}^3 \mathbf{i}_n \wedge \left(\sum_{m=1}^3 \sigma_{mn} \mathbf{i}_m \right) = \sum_{1 \leq m < n \leq 3} (\sigma_{nm} - \sigma_{mn}) \mathbf{i}_m \wedge \mathbf{i}_n$$

ce qui permet de retrouver, comme attendu, la propriété de symétrie du tenseur des contraintes.

Expressions tensorielles de la divergence du tenseur des contraintes

Comme pour la cinématique dans le chapitre précédent, il est souvent plus intéressant d'effectuer les calculs directement de façon tensorielle, plutôt qu'à l'aide des composantes du tenseur dans une base donnée.

Ainsi, on a vu que les composantes de la divergence du tenseur des contraintes dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ peuvent s'exprimer comme :

$$\langle \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{i}_m \rangle = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial x_n}, \quad 1 \leq m \leq 3$$

où (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées cartésiennes associées à cette base. On en déduit alors que, comme $\mathbf{i}_n$ est constant :

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial x_n} \mathbf{i}_m = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial (\sum_{m=1}^3 \sigma_{mn} \mathbf{i}_m)}{\partial x_n} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{i}_n}{\partial x_n}$$

soit, finalement, l'expression intrinsèque :

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x_n} \mathbf{i}_n$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ s'exprime sous la forme de produits tensoriels, qui peuvent ne pas faire intervenir les vecteurs de la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$.

En outre, dans le cas de pièces courbes, il peut être plus intéressant d'utiliser des coordonnées curvilignes et une base associée. Dans le cas d'une géométrie cylindrique d'axe $\mathbf{i}_z$, on exprime alors le tenseur des contraintes comme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = & \sigma_{rr}(r, \theta, z, t) \mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_r(\theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z, t) \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(\theta) + \sigma_{zz}(r, \theta, z, t) \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z \\ & + 2\sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t) \mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(\theta) + 2\sigma_{rz}(r, \theta, z, t) \mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_z + 2\sigma_{\theta z}(r, \theta, z, t) \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

compte tenu de sa propriété de symétrie. En effectuant alors une dérivation composée dans l'expression de la divergence obtenue plus haut, on obtient :

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_n} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_n} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) \mathbf{i}_n$$

où l'on peut regrouper :

$$\sum_{n=1}^3 \frac{\partial r}{\partial x_n} \mathbf{i}_n = \nabla_x r, \quad \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \theta}{\partial x_n} \mathbf{i}_n = \nabla_x \theta, \quad \sum_{n=1}^3 \frac{\partial z}{\partial x_n} \mathbf{i}_n = \nabla_x z$$

où ∇_x désigne le gradient dans la configuration actuelle. Comme on a établi dans l'annexe B.3.2 que $\nabla_x r = \mathbf{i}_r$, $\nabla_x \theta = \mathbf{i}_\theta / r$ et $\nabla_x z = \mathbf{i}_z$, on aboutit finalement à :

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \theta} \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} \mathbf{i}_z$$

qui s'explicite sous la forme de l'expression vectorielle suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = & \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \mathbf{i}_r \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right) \mathbf{i}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

vu que :

$$\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta}(\theta) = \mathbf{i}_\theta(\theta), \text{ et } \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta}(\theta) = -\mathbf{i}_r(\theta)$$

et que la dérivée d'un produit tensoriel est semblable à la dérivée d'un produit :

$$\frac{\partial (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_k} \right) \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_k} \right), \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$$

Par ailleurs, l'exemple suivant permet d'illustrer le calcul de la divergence du tenseur des contraintes dans le cas de l'utilisation d'une base sphérique.

■ **Exemple 2.7 — Réservoir sphérique sous pression : vérification de l'équation d'équilibre local.**

On reprend ici le cas du réservoir sphérique sous pression interne : l'exemple 2.4 avait permis de déterminer le tenseur des contraintes dans le cas d'un réservoir à paroi mince ($e \ll R$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = p \frac{r-R-e}{e} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{pR}{2e} (\mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_\vartheta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi)$$

En utilisant les résultats de l'annexe B.3.3, on peut établir que la divergence du tenseur des contraintes s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \vartheta} \frac{\mathbf{e}_\vartheta}{r} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \phi} \frac{\mathbf{e}_\phi}{r \sin \vartheta}$$

soit, en termes de composantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = & \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\vartheta} \cot \vartheta}{r} \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\phi}}{\partial \phi} + \frac{(\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\phi\phi}) \cot \vartheta + 3\sigma_{r\vartheta}}{r} \right) \mathbf{e}_\vartheta \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\phi}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{3\sigma_{r\phi} + 2\sigma_{\vartheta\phi} \cot \vartheta}{r} \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

On trouve alors dans le cas présent que :

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} \approx \left(\frac{p}{e} + 2p \frac{r-R-e}{er} - p \frac{R}{er} \right) \mathbf{e}_r \approx \frac{p}{eR} (3(r-R) - 2e) \mathbf{e}_r$$

soit un résultat que l'on peut considérer négligeable, car de l'ordre de p/R .

La solution exacte de ce problème est naturellement plus complexe ; en désignant par R_i et R_e les rayons intérieur et extérieur respectivement, il est possible d'établir que :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{pR_i^3}{R_e^3 - R_i^3} \left(1 - \left(\frac{R_e}{r} \right)^3 \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{pR_i^3}{R_e^3 - R_i^3} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_e}{r} \right)^3 \right) (\mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_\vartheta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi)$$

et on constate sans peine que cette expression vérifie $\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ exactement. ■



De ce qui précède, on peut faire deux constatations d'ordre pratique :

- les milieux déformables résistent aux efforts en développant des gradients de contrainte s'ils sont rectilignes, comme dans le cas de l'exemple 2.5 de la barre soumise à l'action de la pesanteur ;
- lorsque leur géométrie est courbe, les milieux déformables peuvent résister par arc-boutement, simplement à partir des contraintes elles-mêmes ; l'exemple 2.7 du réservoir sphérique sous pression interne montre, dans le cas où l'épaisseur est très petite, que ce sont les contraintes circonférencielles, constantes, qui sont prépondérantes devant la contrainte radiale qui évolue dans l'épaisseur : $|\sigma_{rr}|_{\max} \ll \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\phi\phi}$.

Résumé 2.5 — Équation d'équilibre local. Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie, en tout point de l'intérieur d'un domaine matériel Ω_t , et à tout instant t , l'équation d'équilibre local suivante :

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) + \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \forall t$$

où $\mathbf{a}$ est l'accélération de la particule matérielle située en $\mathbf{x}$, de masse volumique ρ .

Dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ associée aux coordonnées (x_1, x_2, x_3) , cette équation s'exprime comme :

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{a}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{f}_V(x_1, x_2, x_3, t) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial x_k}(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{i}_k$$

tandis que, dans une base cylindrique $(\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_z)$ associée aux coordonnées (r, θ, z) , il est possible d'écrire que :

$$\rho(r, \theta, z, t) \mathbf{a}(r, \theta, z, t) = \mathbf{f}_V(r, \theta, z, t) + \frac{\partial \sigma}{\partial r}(r, \theta, z, t) \mathbf{i}_r(\theta) + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(r, \theta, z, t) \frac{\mathbf{i}_\theta(\theta)}{r} + \frac{\partial \sigma}{\partial z}(r, \theta, z, t) \mathbf{i}_z$$

2.3.2 Résolution de l'équation

L'équation d'équilibre local que l'on vient d'établir est une équation aux dérivées partielles d'ordre un ; des constantes d'intégration sont alors requises pour la résoudre.

Conditions sur la frontière extérieure

De façon générale, les seules informations disponibles et compatibles avec le tenseur des contraintes sont les densités surfaciques d'efforts $\mathbf{f}_S$ qui peuvent être appliquées sur la frontière extérieure du domaine Ω_t . En isolant un sous-domaine ω_t dont une partie de la frontière est confondue avec celle du domaine matériel (comme représenté sur la figure 2.10), on peut exprimer que le vecteur contrainte sur cette frontière commune doit être égal à la densité d'efforts imposée, ce qui revient à prolonger (par continuité) jusqu'à la frontière extérieure le tenseur des contraintes pour écrire que :

$$\sigma(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \Omega_t, \quad \forall t$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est la normale sortante unitaire au point $\mathbf{x}$ de la frontière extérieure.

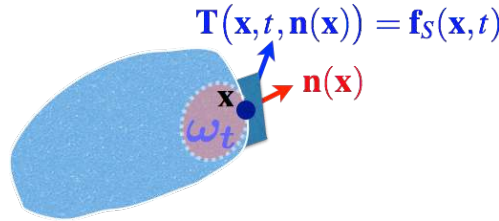


FIGURE 2.10 – Condition en efforts imposée sur la frontière extérieure.

Lorsque l'on est en présence d'un domaine matériel solide, dont une surface Σ est en contact avec de l'air à la pression atmosphérique, il est d'usage d'écrire une condition dite de « bord libre », dans la mesure où l'on écrit que :

$$\sigma(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma, \quad \forall t$$

En effet, le domaine matériel dans sa configuration initiale Ω_0 est déjà soumis à la pression atmosphérique de l'air environnant, et il est habituel de considérer que l'état de contraintes est nul dans cette configuration, vu qu'il sera négligeable devant les autres sollicitations mécaniques auxquelles le domaine sera soumis (on rappelle qu'une pression atmosphérique de un bar correspond à une sollicitation surfacique de 0,1 MPa).

En revanche, quand on s'intéresse aux contraintes au sein d'un domaine fluide, en contact avec de l'air, on peut tenir effectivement compte de la pression atmosphérique vu que le raisonnement précédent n'a pas de raison d'être valide.

■ **Exemple 2.8 — Pression dans un fluide au repos.** Une application directe et triviale de ce qui précède est la détermination de la pression au sein d'un fluide au repos (ou pression « hydrostatique »). En effet, comme on l'avait établi dans l'exemple 2.6, l'équation d'équilibre locale, dans laquelle on injecte la forme du tenseur des contraintes pour un fluide au repos ($\sigma = -p\mathbb{I}$), permet d'écrire directement que :

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_V + \text{div}_x(-p\mathbb{I}) = \rho_f g \mathbf{i}_3 - \nabla_x p$$

où $\mathbf{i}_3$ est vertical (unitaire) orienté vers le bas, et ρ_f désigne la masse volumique du fluide.

En considérant que la frontière $x_3 = 0$ correspond à la surface libre avec l'air, dont la pression est supposée constante et égale à p_a , on trouve donc que la pression évolue avec la profondeur x_3 comme :

$$p(x_3) = p_a + g \int_0^{x_3} \rho_f(\zeta) d\zeta$$

ce qui, dans le cas d'un fluide de masse volumique ρ_f uniforme, conduit à :

$$p(x_3) = p_a + \rho_f g x_3$$

qui est l'expression bien connue de la pression hydrostatique évoluant linéairement avec la profondeur. ■



Si l'on suppose que les conditions aux limites en efforts permettent de résoudre l'équation d'équilibre local, cette dernière n'apporte que trois relations scalaires pour déterminer les six composantes du tenseur des contraintes. À moins de pouvoir faire certaines hypothèses simplificatrices (de symétrie typiquement, comme dans l'exemple 2.4), il sera nécessaire de disposer de relations supplémentaires afin de pouvoir résoudre complètement le problème considéré, ce qui sera l'objet du chapitre 4.

■ **Exemple 2.9 — Barre soumise à l'action de la pesanteur : approche locale.** On reprend ici le cas de la barre suspendue à un support fixe, et soumise à l'action de la pesanteur. L'exemple 2.5 nous avait permis de vérifier que le tenseur des contraintes suivant :

$$\sigma(x_3) = \rho g (L - x_3) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$$

vérifiait l'équation d'équilibre local. Nous allons maintenant voir ce qu'il en est des conditions aux limites. Les densités surfaciques d'efforts sont connues sur les quatre faces latérales et sur la face inférieure (en $x_3 = L$) : en effet, elles sont nulles vu qu'il s'agit de surfaces libres, et on vérifie d'une part que :

$$\sigma(\pm \mathbf{i}_1) = \pm \rho g (L - x_3) \langle \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_1 \rangle \mathbf{i}_3 = \mathbf{0} = \pm \rho g (L - x_3) \langle \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_2 \rangle \mathbf{i}_3 = \sigma(\pm \mathbf{i}_2)$$

en tout point des surfaces latérales, et, d'autre part, que :

$$\sigma_{(x_3=L)} \mathbf{i}_3 = \rho g (L - L) \mathbf{i}_3 = \mathbf{0}$$

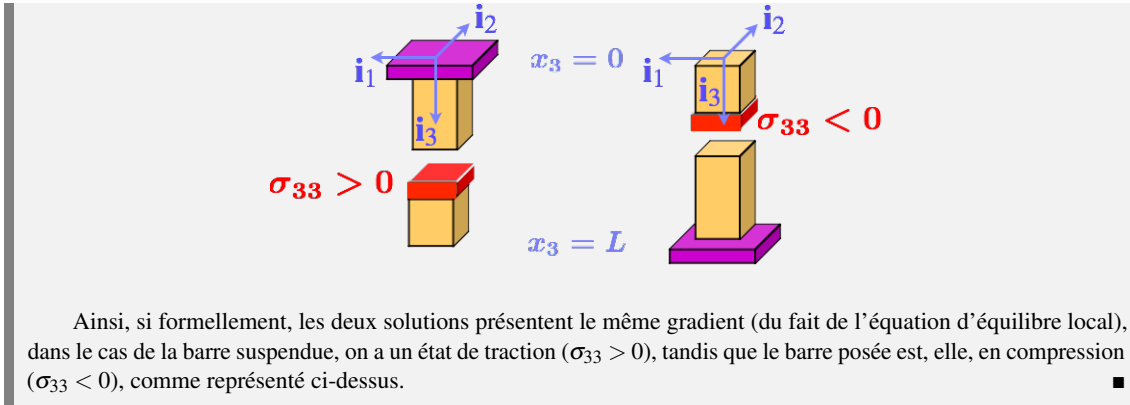
La solution proposée dans l'exemple 2.2 vérifie donc bien l'ensemble des équations du problème.

Décrire les conditions limites de façon correcte est bien sûr primordial pour aboutir à la solution ; ainsi, si l'on considère que la barre est désormais posée sur un support fixe, plutôt que suspendue, la condition sur la surface supérieure (en $x_3 = 0$) devient une condition de bord libre :

$$\sigma_{(x_3=0)}(-\mathbf{i}_3) = \mathbf{0}$$

tandis qu'il n'y a plus de condition en efforts connus sur la surface inférieure (en $x_3 = L$). Comme l'équation d'équilibre local demeure inchangée, on trouve comme solution associée :

$$\sigma(x_3) = -\rho g x_3 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$$



Conditions sur une interface intérieure

Quand plusieurs domaines matériels sont à considérer, l'équation d'équilibre local est à écrire séparément à l'intérieur de chaque domaine. En outre, les densités surfaciques d'efforts ne sont *a priori* pas connues sur les frontières communes à deux domaines ; sur ces interfaces, il faut donc pouvoir établir des relations d'une autre nature.

Pour cela, il suffit d'exprimer la réciprocité du vecteur contrainte en chaque point de l'interface Σ_i entre les deux domaines Ω_k et Ω_l :

$$\sigma^{(k)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}_k(\mathbf{x}) + \sigma^{(l)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}_l(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_i, \quad \forall t$$

où $\sigma^{(k)}$ et $\sigma^{(l)}$ désignent le tenseur des contraintes défini dans Ω_k et Ω_l respectivement. Comme $\mathbf{n}_k(\mathbf{x})$ et $\mathbf{n}_l(\mathbf{x})$ désignent les normales sortantes en $\mathbf{x} \in \Sigma_i$ respectivement de Ω_k et de Ω_l (comme représenté sur la figure 2.11), elles sont nécessairement opposées vu qu'elles sont définies au niveau du plan tangent commun au point considéré, ce qui permet d'écrire que :

$$\sigma^{(k)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \sigma^{(l)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_i, \quad \forall t$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ désigne indifféremment l'une ou l'autre des deux normales définies plus haut. Pour des raisons évidentes, on parle alors de continuité du vecteur contrainte au niveau de l'interface entre les deux domaines.

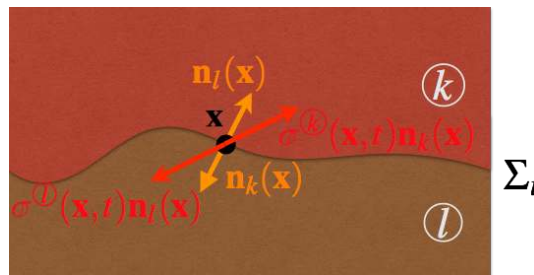


FIGURE 2.11 – Condition en efforts sur une interface intérieure.



Le résultat précédent ne traduit la continuité que du vecteur contrainte au niveau de l'interface, et non celle du tenseur des contraintes complet *a priori* : seules trois des six composantes sont ainsi concernées. L'exemple suivant met en évidence ce point important.

■ **Exemple 2.10 — Réservoir sphérique sous pression : approche locale.** On considère ici le cas du réservoir sphérique sous pression interne, pour lequel on avait constaté dans l'exemple 2.7 que la solution proposée dans l'exemple 2.4 :

$$\boldsymbol{\sigma} = p \frac{r-R-e}{e} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{pR}{2e} (\mathbf{e}_\vartheta \otimes \mathbf{e}_\vartheta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi)$$

dans le cas où l'épaisseur était très petite ($e \ll R$), vérifiait l'équation d'équilibre local

En ce qui concerne les conditions aux limites, le réservoir est soumis à la pression p du fluide sur sa surface intérieure, et à la pression atmosphérique (considérée nulle) sur sa surface extérieure. On constate alors que les vecteurs contraintes sur ces deux surfaces sont respectivement :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(r=R)}(-\mathbf{e}_r) = -p \frac{R-R-e}{e} \mathbf{e}_r = p \mathbf{e}_r$$

et

$$\boldsymbol{\sigma}_{(r=R+e)} \mathbf{e}_r = p \frac{R+e-R-e}{e} \mathbf{e}_r = \mathbf{0}$$

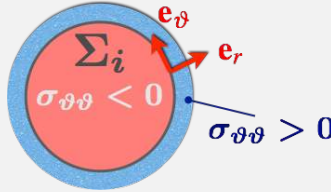
la dernière condition traduisant effectivement le fait que la surface extérieure est un bord libre, vu qu'elle n'est soumise qu'à la pression atmosphérique.

En outre, la condition sur la surface intérieure (en $r = R$) peut être analysée de façon un peu plus précise. Le fluide étant un milieu continu, le tenseur des contraintes associé vaut $\boldsymbol{\sigma}^f = -p \mathbb{I}$. La condition en $r = R$ peut ainsi s'interpréter comme une condition de continuité du vecteur contrainte au niveau d'une interface entre deux domaines matériels : on vérifie en effet que, sur cette interface :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(r=R)} \mathbf{e}_r = -p \mathbf{e}_r = \boldsymbol{\sigma}_{(r=R)}^f \mathbf{e}_r$$

Cet exemple illustre bien également qu'il n'y a aucune raison pour qu'il y ait continuité complète du tenseur des contraintes au passage de l'interface ; en effet, on a :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(r=R)} \mathbf{e}_\vartheta = \frac{pR}{2e} \mathbf{e}_\vartheta \neq -p \mathbf{e}_\vartheta = \boldsymbol{\sigma}_{(r=R)}^f \mathbf{e}_\vartheta$$



Le réservoir présente ainsi des contraintes circonférentielles de traction, tandis que le fluide est comprimé. ■

Résumé 2.6 — Conditions aux limites pour le vecteur contrainte. En tout point de la frontière extérieure d'un domaine matériel Ω_t , le vecteur contrainte est égal à la densité surfacique d'efforts $\mathbf{f}_S$ appliquée :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_t, \quad \forall t$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est la normale sortante unitaire au point $\mathbf{x}$ considéré.

Dans le cas d'une frontière entre deux domaines matériels k et l , on exprime la continuité du vecteur contrainte au niveau de cette interface :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^{(l)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_i, \quad \forall t$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est la normale unitaire (de sens quelconque) au point $\mathbf{x}$ considéré.

2.4 Résumé des formules importantes

Relations fondamentales de la dynamique – Résumé 2.1 page 42

$$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{a} dV_x = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_V dV_x + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f}_S dS_x$$

$$\int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \rho \mathbf{a} dV_x = \int_{\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_V dV_x + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_S dS_x$$

Tenseur des contraintes (de Cauchy) – Résumé 2.4 page 55

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{T}(\mathbf{i}_k) \otimes \mathbf{i}_k$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

Équation d'équilibre local – Résumé 2.5 page 62

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{f}_V + \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x_k} \mathbf{i}_k$$

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \theta} \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} \mathbf{i}_z$$

Conditions aux limites pour le vecteur contrainte – Résumé 2.6 page 66

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f}_S$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(l)} \mathbf{n}$$



3. Critères de résistance

Les efforts intérieurs au sein de la matière peuvent se modéliser sous la forme d'un tenseur des contraintes qui, étant symétrique, présente six composantes scalaires indépendantes variant *a priori* en chaque point du domaine étudié et à tout instant. Pour savoir si, localement, la matière est capable de résister aux sollicitations en présence, il est nécessaire de pouvoir déduire de ce tenseur un « indicateur » scalaire, que l'on pourra comparer à un seuil caractéristique de la résistance du matériau. Cet indicateur est notamment lié à la nature et la structure physique de ce dernier.

POURQUOI ÉTUDIER LES CRITÈRES DE RÉSISTANCE ?

3.1 Essais de caractérisation mécanique

La façon la plus simple d'étudier le comportement d'un matériau, et en particulier sa résistance mécanique, est de mettre en place des essais expérimentaux, permettant ainsi de les tester sous des sollicitations spécifiques. Compte tenu de la notion de contrainte que l'on a introduite dans le chapitre précédent, on conçoit aisément qu'il est difficile de mesurer expérimentalement un état de contraintes au sein d'une pièce, contrairement aux déformations dont la mesure est directe et bénéficie des progrès récents des moyens d'imagerie et des logiciels de traitement d'images associés.

Ainsi, on cherche généralement à imposer un état de contrainte uniaxial (c'est-à-dire présentant une seule composante) et, si possible, homogène dans la zone d'intérêt de la pièce testée, de façon à pouvoir déterminer cet état de contraintes avec la seule mesure des efforts exercés globalement sur la pièce, à savoir, en général, une résultante et/ou un moment caractérisant l'action de la machine d'essai sur la pièce.

Dans cette optique, l'essai uniaxial le plus classique est l'essai de traction simple, que nous allons détailler dans le paragraphe qui suit, et qui permet d'obtenir un état de contrainte homogène dans la zone d'intérêt de la pièce testée. Une multitude d'autres essais peuvent bien sûr être envisagés : citons par exemple l'essai de torsion (évoqué dans l'exemple 5.1, page 124), ou encore l'essai de flexion (détaillé dans l'exemple 6.14, page 205), pour lesquels le champ de contraintes

évolue linéairement au sein de la pièce. Enfin, dans certains cas, il peut être nécessaire de mettre en place des essais multiaxiaux, pour mettre en évidence certains phénomènes ou comportements que les essais uniaxiaux ne permettent pas de constater.

3.1.1 Essai de traction simple

Le principe de l'essai de traction simple est d'obtenir un état de contrainte uniaxial homogène dans une zone précise de la pièce testée : $\sigma = \sigma_{ee} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$. Pour cela, les pièces, que l'on appelle éprouvettes, sont de formes allongées, et présentent trois parties distinctes, visibles sur la figure 3.1 :

- une partie centrale fine et allongée, que l'on appelle « zone utile », car c'est là que l'hypothèse d'homogénéité de la contrainte va être adoptée ;
- deux parties situées aux extrémités, appelées « têtes », qui sont plus larges que la zone utile, et qui sont destinées à l'accroche dans la machine d'essai ;
- des « congés » de raccordement entre ces parties, qui servent de zones de « transition » du point de vue de la géométrie, et dont l'importance sera justifiée dans le paragraphe 3.3.2.

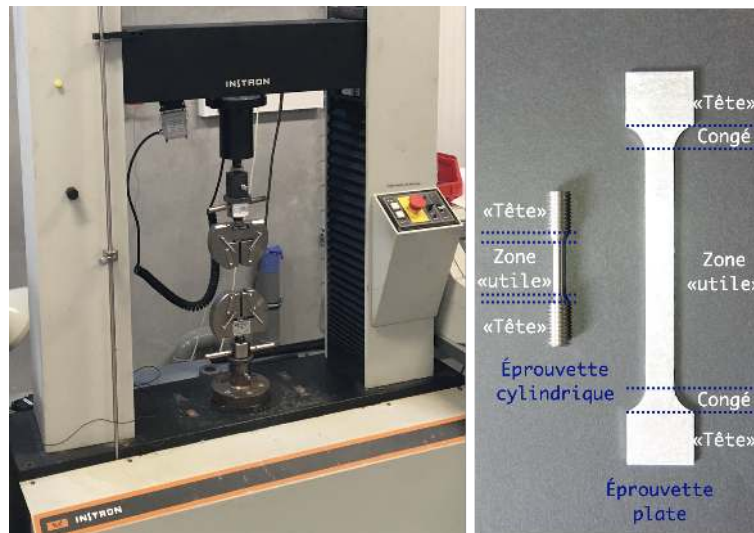


FIGURE 3.1 – Machine d'essai (à gauche) et éprouvettes de traction typiques (à droite).

Détermination de l'état de contrainte

Cet état de contrainte est obtenu par l'intermédiaire d'une machine d'essai, représentée sur la figure 3.1, dont le rôle est d'appliquer aux deux extrémités de l'éprouvette (au niveau des « têtes ») deux actions mécaniques caractérisées par deux résultantes $\mathbf{R}^0 = -\mathbf{R}^L$, opposées et de direction l'axe longitudinal $\mathbf{e}$ de l'éprouvette, supposé vertical et orienté vers le haut.

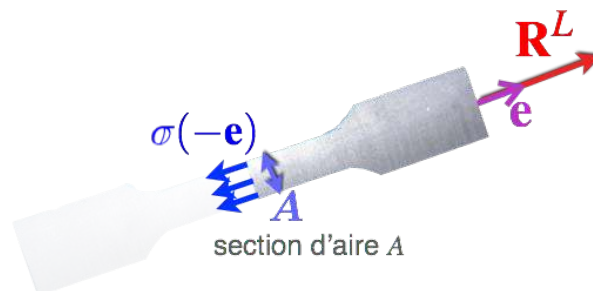


FIGURE 3.2 – Isolement d'une moitié de l'éprouvette

Si l'on coupe par la pensée l'éprouvette en deux moitiés symétriques (comme représenté sur la figure 3.2), et que l'on néglige l'action de la pesanteur, la moitié supérieure est en équilibre, en étant soumise à l'action de la machine, de résultante $\mathbf{R}^L$, et l'action de la moitié inférieure, de résultante :

$$\mathbf{R} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e}) dS_x = - \int_{\Sigma} \sigma_{ee} \mathbf{e} dS_x$$

où Σ est le plan médian horizontal de l'éprouvette. Si l'on suppose que l'état de contrainte est homogène dans la zone utile de l'éprouvette, il l'est ainsi en tout point de la section Σ d'aire A , et l'on établit directement par équilibre statique de la partie supérieure que :

$$\mathbf{R}^L = \sigma_{ee} A \mathbf{e}$$

ce qui permet donc d'obtenir la contrainte longitudinale à partir de la mesure de la force exercée sur l'éprouvette, et de l'aire de sa section : $\sigma_{ee} = \|\mathbf{R}^L\| / A$.

En pratique, l'éprouvette est fixée d'un côté à une partie fixe de la machine de traction, et de l'autre à une partie mobile que l'on appelle la « traverse », dont on mesure le déplacement. Il est alors possible de piloter l'essai en contrainte (par l'intermédiaire de la mesure de la résultante exercée) ou en déformation (en contrôlant le déplacement de la traverse).

Une façon de justifier *a posteriori* l'homogénéité de la contrainte longitudinale dans la zone utile peut être d'utiliser une simulation numérique pour évaluer cette contrainte au sein de l'éprouvette. Pour cela, il faut notamment s'interroger sur la nature précise des efforts appliqués localement à l'éprouvette, puisque l'on a vu dans le paragraphe 2.3.2 que le problème nécessitait de se donner les vecteurs contraintes sur les parties de la frontière sollicitées mécaniquement. On propose alors de tester trois conditions différentes localement, mais qui ont toutes trois la même résultante :

1. des densités surfaciques d'efforts appliquées normalement aux surfaces extrêmes des deux têtes de l'éprouvette, et supposées uniformes ;
2. des densités surfaciques d'efforts appliquées tangentiellement aux surfaces latérales des deux têtes d'éprouvette, et supposées uniformes ;
3. un cas limite où la surface d'application des efforts se réduit en un point à chaque extrémité (ce qui est effectivement envisageable dans le cas d'une simulation numérique).

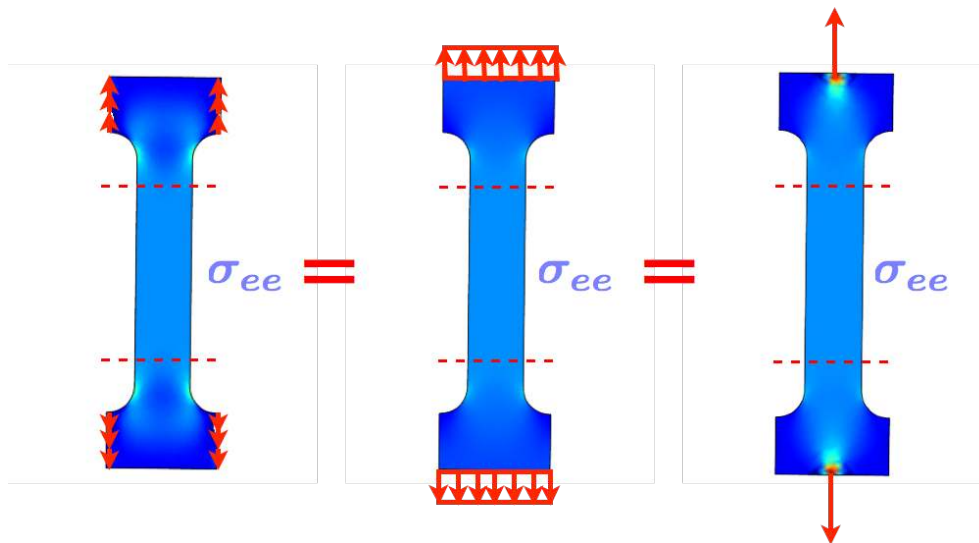


FIGURE 3.3 – États de contrainte uniaxiaux σ_{ee} obtenus par simulation numérique pour les trois cas de chargement envisagés : cas 1 (au centre), cas 2 (à gauche), et cas 3 (à droite).

L'état de contrainte uniaxial associé à chacun de ces cas est représenté sur la figure 3.3 dans le cas d'un comportement dit élastique, que l'on décrira plus bas : cette contrainte est homogène au sein de la zone utile pour chaque cas, et les valeurs associées sont les mêmes, malgré la diversité des efforts appliqués localement. On voit en revanche que les champs sont potentiellement très différents dans les têtes de l'éprouvette, ce qui justifie l'intérêt d'avoir choisi une forme allongée pour cette dernière ; en effet, le principe dit de Saint-Venant permet de justifier que la répartition locale des efforts appliqués n'a que peu d'influence à « grande » distance, pour peu que ces efforts aient des caractéristiques globales identiques, à savoir mêmes résultantes et mêmes moments (nuls ici dans le cas de la traction simple). Ce principe sera exposé de manière plus détaillée dans le paragraphe 5.2.3.

Courbes de traction

En complément de la contrainte longitudinale σ_{ee} , on mesure également la déformation longitudinale $\varepsilon_{ee} = \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$ au sein de la zone utile, qui est, elle aussi, homogène dans le cas de l'essai de traction simple. Ceci permet alors de tracer une courbe dite de traction, caractéristique du comportement du matériau jusqu'à sa rupture finale.

Pour la plupart des matériaux, on observe deux zones correspondant à des comportements très différents, visibles sur la figure 3.4 (courbe de gauche) :

1. un comportement réversible, dans la mesure où, dès que l'on supprime les efforts appliqués sur l'éprouvette, celle-ci retrouve sa forme d'origine, non déformée : ceci correspond à un comportement dit « élastique », qui s'observe pour des déformations modérées, et se caractérise très souvent par une évolution linéaire de la contrainte uniaxiale en fonction de la déformation longitudinale ;
2. au delà d'un certain seuil de contrainte (appelé « limite d'élasticité »), un comportement dit « plastique », qui se traduit par des déformations irréversibles : après suppression des efforts appliqués, l'éprouvette ne retrouve pas sa forme d'origine, ce qui signifie qu'une déformation subsiste à contrainte nulle : on parle alors de « plasticité ».

Les matériaux présentant clairement ces deux zones sont dits « ductiles » ; en revanche, certains matériaux présentent un domaine plastique très limité, voire inexistant, comme représenté sur la courbe de droite de la figure 3.4 : il s'agit de matériaux « fragiles ».

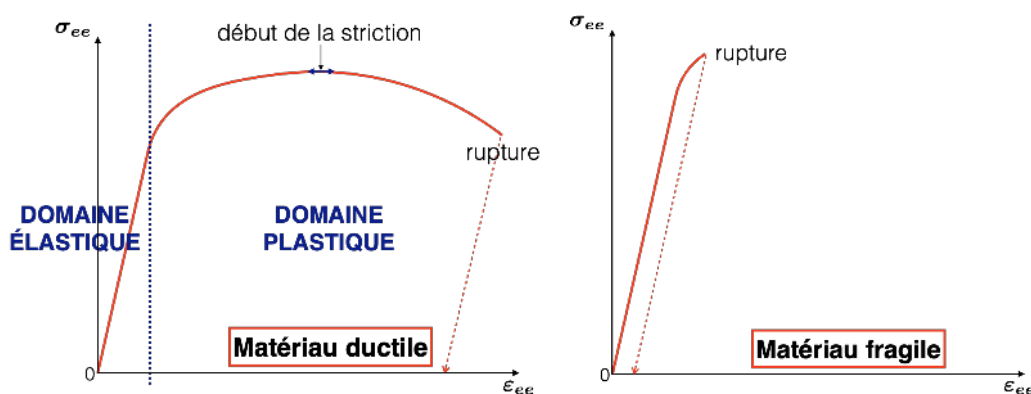


FIGURE 3.4 – Courbes de traction pour des matériaux ductiles (à gauche) et fragiles (à droite).

Ces deux domaines (élasticité et plasticité) correspondent à des phénomènes très différents à l'échelle atomique, que l'on peut schématiser très succinctement comme suit :

- le domaine élastique correspond à une déformation du réseau d'atomes, dans laquelle ces derniers quittent leur position d'équilibre correspondant au minimum du potentiel d'interaction atomique, et sont alors soumis à une force de « rappel » qui tend à les faire revenir vers

cette position optimale ; ceci explique le caractère réversible de l'élasticité ;

- au-delà d'un certain seuil, localement les liaisons entre atomes peuvent se rompre, mais une partie de ces atomes recréent des liaisons dans leur nouveau voisinage, créant une déformation qui est alors irréversible, et la suppression des sollicitations laisse les atomes avec leurs nouveaux voisins, à moins d'exercer un effort contraire dépassant de nouveau le seuil.

La figure 3.5 (en haut) résume la description de ces deux phénomènes, dans le cas d'un réseau atomique soumis à du cisaillement.

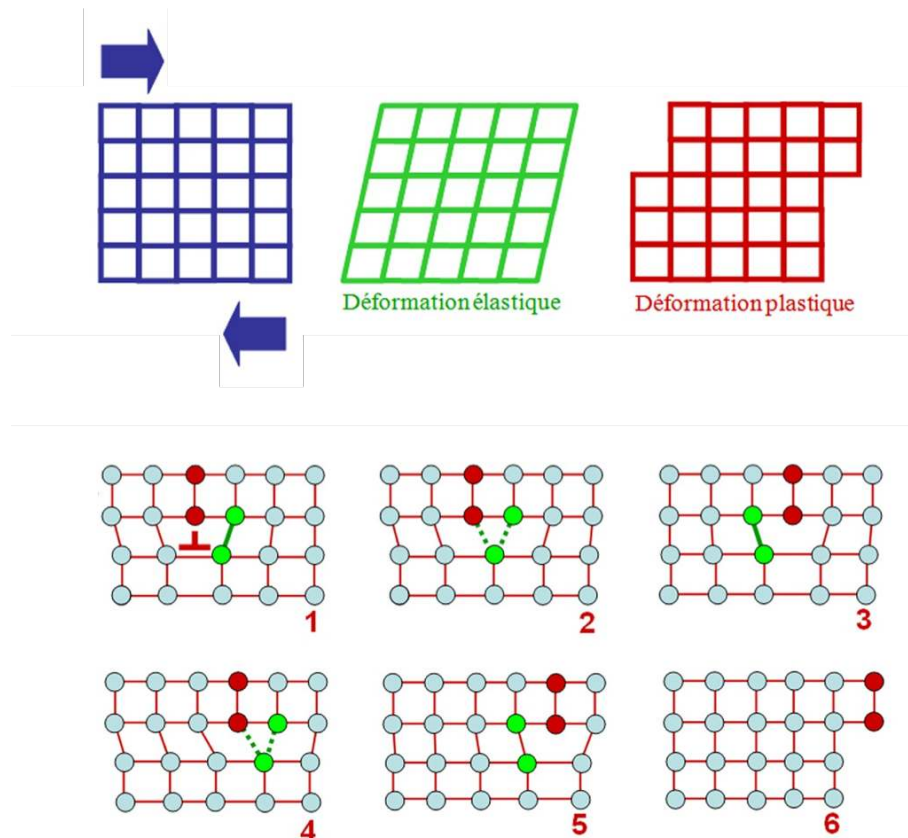
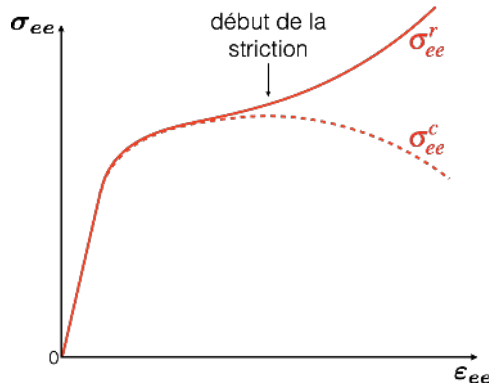


FIGURE 3.5 – Principe des déformations élastiques et plastiques (en haut) et mouvement d'une dislocation (en bas).

En pratique, toutefois, il n'est pas possible d'avoir le glissement de plans atomiques par rupture simultanée de l'ensemble des liaisons interatomiques séparant les deux plans concernés, car ceci nécessiterait des niveaux de sollicitation beaucoup plus élevés que ce qui est observé expérimentalement. Ce glissement est en fait obtenu par la « propagation » de défauts, généralement des discontinuités linéaires de la structure atomique, que l'on appelle « dislocations » : la figure 3.5 (en bas) illustre comment le glissement entre deux plans atomiques se fait progressivement, par ruptures successives des liaisons entre les atomes entourant le défaut.

R Nous n'avons pas insisté plus haut, lors de la détermination de la contrainte longitudinale en fonction de l'effort appliqué par la machine de traction, sur la mesure de l'aire de la section. En effet, on constate au cours de l'essai de traction que cette dernière évolue de manière significative, surtout dans le cas d'un matériau ductile : un phénomène dit de « striction » (dont le début est repéré sur la courbe de gauche de la figure 3.4) correspond à la réduction localisée et rapide de la section de l'éprouvette, menant finalement à la rupture au niveau de cette zone.

Comme la courbe tracée dans la figure 3.4 ne tient pas compte de la réduction de cette aire (on parle alors de courbe « conventionnelle »), on observe une augmentation de la déformation pour une contrainte σ_{ee}^c qui semble diminuer jusqu'à la rupture ; en fait, si l'on tient compte de l'aire réelle, la contrainte réelle σ_{ee}^r (ou « rationnelle ») augmente jusqu'à la rupture, comme illustré sur la figure ci-dessous.



En pratique, on peut souvent se contenter d'établir la courbe de traction conventionnelle, en gardant en mémoire que l'on sous-estime la contrainte réelle de rupture, ce qui joue dans le sens de la sécurité.

Ordres de grandeur

Matériaux	Limite d'élasticité (MPa)	Résistance à la traction (MPa)
bois ($\perp$ fibres)		0,5–1,5
béton		2–5
caoutchouc		15
polyéthylène haute densité	26–33	35–40
bois ($\parallel$ fibres)		10–40
composites ($\perp$ fibres)		30–50
verre		30–60
nylon	45	75
os	104–121	130
cuivre	70	220
alliages d'aluminium	240–400	300–500
laiton	200	550
tungstène	940	1500
composites ($\parallel$ fibres)		1000–1800
saphir	400	1900
aciers	130–2500	200–2500
diamant	1600	2800

TABEAU 3.1 – Valeurs typiques pour divers matériaux de la limite d'élasticité et de la résistance à la traction.

Le tableau 3.1 mentionne, pour divers matériaux courants, les valeurs typiques de leur résistance à la traction, ainsi que de leur limite d'élasticité s'il s'agit de matériaux ductiles. Pour certaines familles de matériaux, telles que celle des alliages métalliques, les ordres de grandeur présentent des plages de variation étendues, car les propriétés peuvent être modulées de diverses façons lors de l'élaboration du matériau (éléments d'addition, traitements thermiques, ...). Par ailleurs, certains matériaux, comme les composites à fibres longues, n'ont pas les mêmes caractéristiques selon qu'ils sont sollicités parallèlement ou perpendiculairement aux fibres. Enfin, des paramètres tels que la température peuvent avoir une influence sur les valeurs observées.

3.1.2 Types de rupture

Les essais de caractérisation, tels que l'essai de traction que l'on vient d'analyser, permettent donc d'obtenir une valeur seuil associée à la rupture du matériau. Cependant, la question se pose maintenant de savoir comment utiliser cette valeur seuil dans le cas d'une structure réelle, de forme potentiellement complexe, et soumise à des chargements quelconques. De plus, la multiplicité des modalités de rupture que l'on peut observer dans le cas de l'essai de traction montre qu'il existe une multitude de mécanismes locaux, à l'échelle microscopique, qu'il faut pouvoir appréhender avant de pouvoir effectuer cette transposition.

De manière volontairement simpliste, on considère ici deux types de rupture seulement, reliés aux deux comportements génériques que l'on a montrés sur la figure 3.4, et dont les mécanismes microscopiques sont très différents (ce qui, toutefois, n'exclut pas la possibilité de coexistence de ces deux types); les faciès de rupture associés, obtenus lors d'un essai de traction, sont représentés schématiquement sur la figure 3.6, et sont justifiés brièvement dans ce qui suit. Plus de précisions pourront être trouvées dans [Lem+09; RHB07].

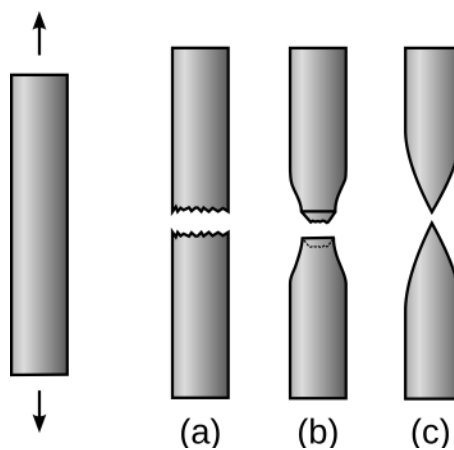


FIGURE 3.6 – Faciès de rupture typiques pour un matériau fragile (a) et un matériau ductile (b)-(c).

Rupture fragile

Ce type de rupture se produit pour des matériaux dans lesquels il n'est pas possible d'avoir de déformation plastique significative, comme les céramiques, ou encore, à basse température, les métaux et certains polymères. Une fois qu'une fissure a été initiée, celle-ci n'a pas besoin de beaucoup d'énergie pour se propager, ce qui entraîne une rupture brutale, comme dans le cas du verre par exemple, sans que les efforts appliqués n'aient nécessairement augmenté de façon significative.

Dans le cas de matériaux présentant une structure dite cristalline (caractérisée par des empilements très ordonnés d'atomes), la création de la fissure résulte d'une rupture des liaisons atomiques entre deux plans cristallins faiblement liés, qui sont séparés par des efforts qui leur sont appliqués perpendiculairement : on parle alors de rupture par « clivage ». Cette dernière créant une multitude de petites facettes parfaitement planes, le faciès de rupture peut avoir un aspect brillant, comme dans le cas de la fonte présenté sur la figure 3.7.

Pour des matériaux amorphes (c'est-à-dire sans structure cristalline), l'absence de plans caractéristiques de séparation entraîne que la rupture se fait selon une surface courbe et lisse, comme dans le cas du verre présenté sur la figure 3.7, en se propageant perpendiculairement à l'effort appliqué. On parle dans ce cas de rupture « conchoïdale ».



FIGURE 3.7 – Faciès de rupture dans le cas de la fonte (à gauche) et du verre (à droite).

Rupture ductile

Au contraire du cas précédent, ce type de rupture se produit avec la présence d'une déformation plastique importante, visible notamment dans le phénomène de striction que l'on a constaté lors de l'essai de traction. Pour des métaux particulièrement purs, cette déformation peut aller jusqu'à la séparation de l'éprouvette en deux pointes (cas (c) représenté sur la figure 3.6).

Cependant, la plupart des métaux utilisés dans l'industrie contiennent des particules (comme des éléments d'addition dans le cas d'alliages), et, au cœur des zones déformées plastiquement, des micro-fissures se forment à l'interface entre ces particules et le métal environnant ; le mouvement des dislocations, obtenu par le glissement de certains plans cristallins comme exposé plus haut, tend à transformer ces micro-fissures en petites cavités de tailles croissantes qui coalescent finalement au niveau de la zone de striction pour former les fissures qui entraîneront la rupture du matériau. L'ensemble de ces étapes est résumé sur la figure 3.8.

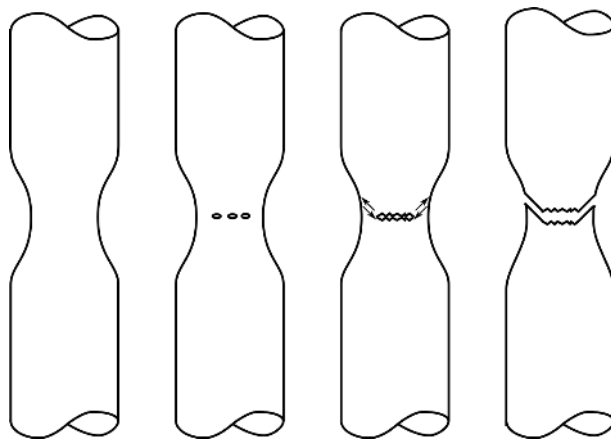


FIGURE 3.8 – Étapes de la rupture ductile : striction, puis création, et coalescence des micro-cavités, et enfin fissuration de l'éprouvette en forme de cône.

La propagation des fissures est donc moins brutale que dans le cas fragile, car il y a besoin d'énergie, et donc d'un effort croissant, pour que la fissure se propage (l'énergie dissipée au cours d'un essai de traction, directement estimable comme l'aire sous la courbe de traction, est très différente pour les deux comportements sur la figure 3.4). La propagation de ces fissures a tendance à se faire selon les directions de glissement des plans cristallins impliqués dans le mouvement

des dislocations, d'autant plus que l'on se rapproche du bord de l'éprouvette, ce qui explique la forme conique généralement observée du faciès de rupture, comme dans le cas des deux matériaux métalliques de la figure 3.9. En outre, le faciès, d'aspect mat, porte encore les traces des cavités qui se sont formées lors de la rupture, et qui apparaissent sous la forme de « cupules », majoritairement dans la zone centrale de l'éprouvette.



FIGURE 3.9 – Faciès de rupture dans le cas d'un acier (à gauche) et d'un alliage d'aluminium (à droite).



Plutôt que de caractériser précisément le moment de la rupture, le but des critères que l'on va présenter dans ce qui suit est de pouvoir apporter une information dimensionnante vis-à-vis de la structure à concevoir.

Ainsi, dans le cas des matériaux ductiles, on considère souvent que c'est le seuil d'entrée dans le domaine plastique (c'est-à-dire la « limite d'élasticité ») qui doit servir de critère, plutôt que la valeur extrême pour laquelle la rupture se produit : en effet, d'une part le seuil de rupture n'est généralement pas si éloigné de la limite d'élasticité, même dans le cas de matériaux très ductiles, et, d'autre part, l'apparition de déformations irréversibles peut être de toute façon préjudiciable à la fonction que doit assurer la structure en service.

Pour les matériaux fragiles en revanche, cette distinction ne se pose pas, puisque, avec un domaine de plasticité extrêmement réduit, voire inexistant, la rupture se produit au moment de la sortie du domaine élastique.

3.2 Critères

En vue d'être à même d'introduire des critères de rupture pertinents pour les différents types de matériaux envisagés, il est tout d'abord essentiel de définir de nouvelles quantités reliées au tenseur des contraintes que l'on a calculé. En effet, on comprend bien que les valeurs prises par les composantes de ce dernier sont directement reliées à la base vectorielle que l'on a choisie : il est donc nécessaire soit de choisir une base pertinente compte tenu de la nature des phénomènes locaux présents au sein de la matière, soit de définir des grandeurs « invariantes », indépendantes de la base d'expression retenue.

3.2.1 Étude locale des contraintes

Ce paragraphe est consacré à l'exposé des différentes modalités de représentation locale des contraintes, qui pourront être utilisés dans les critères de résistance qui seront exposés plus loin.

Grandeurs liées au choix de la facette

Une première modalité est de considérer les éléments caractéristiques associés à la surface de coupe introduite par la pensée quand on définit le vecteur contrainte, à savoir le plan tangent à cette surface au niveau du point considéré, et la normale sortante $\mathbf{n}$, orthogonale à cette facette.

Contraintes normale et tangentielle. Les quantités définies ici sont représentées sur la figure 3.10. La contrainte normale, notée σ_{nn} , se définit comme la composante du vecteur contrainte selon la normale sortante à la surface de coupure au point considéré :

$$\sigma_{nn}(\mathbf{x}, t) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \forall t$$

La contrainte tangentielle, ou contrainte de cisaillement, notée $\boldsymbol{\tau}_\Sigma$, se définit comme la projection du vecteur contrainte dans le plan de la facette Σ ; elle peut donc s'obtenir comme :

$$\boldsymbol{\tau}_\Sigma(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} - \sigma_{nn}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \forall t$$

Ce vecteur peut alors se décomposer dans une base du plan de la facette; ainsi, si $\mathbf{m}$ est un vecteur unitaire de ce plan (par conséquent $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$), on note :

$$\tau_{mn}(\mathbf{x}, t) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \langle \boldsymbol{\tau}_\Sigma(\mathbf{x}, t), \mathbf{m} \rangle, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \forall t$$

que l'on appelle cission dans la direction $\mathbf{m}$ pour un plan de normale $\mathbf{n}$.

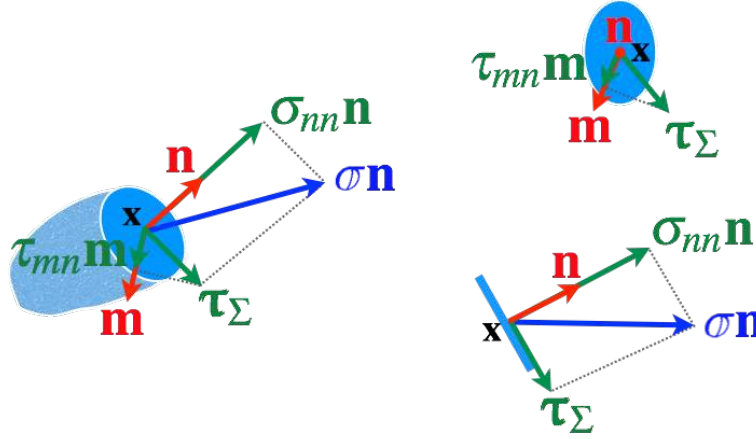


FIGURE 3.10 – Contrainte normale, contrainte tangentielle, cission.

■ **Exemple 3.1 — Essai de traction simple : grandeurs liées à la facette.** La définition des grandeurs locales dans le cas d'un essai de traction simple dans la direction $\mathbf{e}$ est immédiate; en effet, comme le tenseur des contraintes s'exprime simplement comme $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ee} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$ avec $\sigma_{ee} > 0$, on obtient :

— pour la contrainte normale :

$$\sigma_{nn} = \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \sigma_{ee} \langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle = \sigma_{ee} \langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle^2$$

soit, en posant α l'angle entre la direction $\mathbf{e}$ de traction et la normale $\mathbf{n}$ à la facette :

$$\sigma_{nn} = \sigma_{ee} \cos^2 \alpha$$

— pour la contrainte tangentielle :

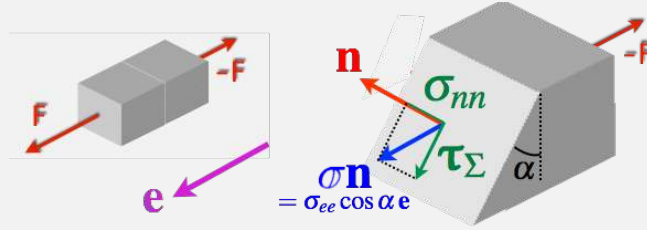
$$\boldsymbol{\tau}_\Sigma = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \sigma_{nn} \mathbf{n} = \sigma_{ee} \langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle (\mathbf{e} - \langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}) = \sigma_{ee} \cos \alpha (\mathbf{e} - \cos \alpha \mathbf{n})$$

dont la norme vaut :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\tau}_\Sigma\| &= \sigma_{ee} |\cos \alpha| \|\mathbf{e} - \cos \alpha \mathbf{n}\| = \sigma_{ee} |\cos \alpha| \sqrt{\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle - 2 \cos \alpha \langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle + \cos^2 \alpha \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \\ &= \sigma_{ee} |\cos \alpha| \sqrt{1 - 2 \cos \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha} = \sigma_{ee} |\cos \alpha \sin \alpha| \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$\|\boldsymbol{\tau}_\Sigma\| = \frac{\sigma_{ee} |\sin(2\alpha)|}{2}$$



— pour la cisssion dans la direction $\mathbf{m}$ perpendiculaire à $\mathbf{n}$:

$$\tau_{mn} = \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \sigma_{ee} \langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle \langle \mathbf{e}, \mathbf{m} \rangle$$

ce qui permet de retrouver, pour $\mathbf{m}$ unitaire et colinéaire à $\boldsymbol{\tau}_\Sigma$, une cisssion égale à la norme de la contrainte tangentielle : $\tau_{mn} = \sigma_{ee} |\sin(2\alpha)|/2$.

Contraintes principales

On part ici de la constatation que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est symétrique : il est donc diagonalisable, et admet des valeurs propres réelles, associées à des vecteurs propres formant une base orthonormée.

Contraintes principales et directions principales des contraintes. Les valeurs propres λ_k^σ du tenseur des contraintes, appelées contraintes principales, et les vecteurs propres $\boldsymbol{\phi}_k^\sigma$ associés, appelés directions principales, vérifient la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\phi}_k^\sigma = \lambda_k^\sigma \boldsymbol{\phi}_k^\sigma$$

Physiquement, les directions principales correspondent à des orientations de facettes (définies par leur normale) telles que le vecteur contrainte est porté par la normale elle-même, ce qui revient à dire qu'il n'y a pas de contrainte tangentielle sur ces facettes ; comme ces directions principales sont perpendiculaires deux à deux, on se retrouve dans la situation représentée sur la figure 3.11.

Quand il n'y a pas d'ambiguïté possible avec les composantes du tenseur des contraintes, on note souvent les contraintes principales σ_k , en les classant de la plus grande à la plus petite. Si l'une des contraintes principales est nulle, on dit que l'état de contrainte est biaxial, ou plan. Si les trois sont confondues, on parle d'état de contrainte sphérique, comme on l'a vu dans le cas d'un fluide au repos ; dans le cas de valeurs propres multiples, il est quand même toujours possible de déterminer une base orthonormée selon les directions principales.

Les contraintes principales, ainsi que leurs directions associées, sont invariantes au sens que leurs expressions ne sont pas liées au choix d'une base, puisqu'elles se calculent comme les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_k \mathbb{I}) = -\sigma_k^3 + i_1(\boldsymbol{\sigma}) \sigma_k^2 - i_2(\boldsymbol{\sigma}) \sigma_k + i_3(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad 1 \leq k \leq 3$$

où les termes $i_k(\boldsymbol{\sigma})$ sont les invariants du tenseur des contraintes, définis dans l'annexe A.2.4.



Bien que les contraintes et directions principales soient effectivement indépendantes du choix d'une base d'expression, elles dépendent tout de même *a priori* du point $\mathbf{x} \in \Omega_t$ considéré, ainsi que du temps.

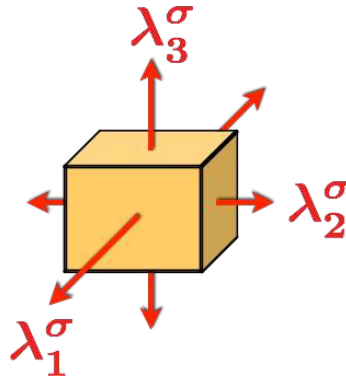
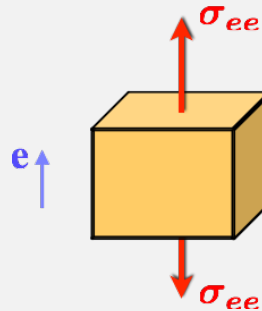


FIGURE 3.11 – État de contrainte dans la base des directions principales.

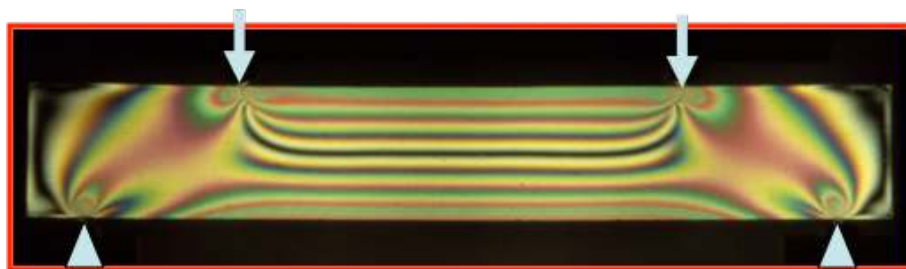
■ **Exemple 3.2 — Essai de traction simple : contraintes principales et directions principales associées.** Comme, dans le cas de l'essai de traction simple selon une direction $\mathbf{e}$, le tenseur des contraintes est uniaxial ($\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ee} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$), la détermination des contraintes principales est immédiate. En effet, le vecteur contrainte sur une facette de normale $\mathbf{n}$ vaut $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \sigma_{ee} \langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{e}$, d'où, en particulier :

1. $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} = \sigma_{ee} \mathbf{e}$, ce qui signifie que σ_{ee} est contrainte principale, associée à la direction $\mathbf{e}$ qui correspond à la direction de l'essai de traction ;
2. $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{m} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{m} \perp \mathbf{e}$, ce qui montre que tout vecteur unitaire $\mathbf{m}$ perpendiculaire à $\mathbf{e}$ est direction principale, associée à une contrainte principale nulle ; cette dernière correspond à une valeur propre double du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$, et toute base du plan de normale $\mathbf{e}$ est principale.



Ⓡ Expérimentalement, certains matériaux transparents, dits « photoélastiques » ([Bré+11]), ont la propriété de présenter des franges colorées quand ils sont placés entre deux filtres qui polarisent la lumière selon des directions perpendiculaires l'une de l'autre. Ils permettent alors de visualiser directement les différences entre les contraintes principales au sein du matériau. Ainsi, les gradients de contraintes sont d'autant plus forts que les franges, que l'on appelle « isochromatiques », sont resserrées.

L'exemple de l'essai de flexion « quatre points », présenté ci-dessous, permet de constater, dans la zone centrale de l'éprouvette, une évolution linéaire de la contrainte longitudinale en fonction de la dimension transverse.



Représentation de Mohr

Parallèlement aux définitions précédentes se fait sentir le besoin de disposer d'une représentation graphique permettant de condenser de manière pragmatique l'information contenue, en chaque point du domaine matériel, dans les six composantes du tenseur des contraintes. En particulier, en anticipant un peu sur la nature des critères présentés plus loin, il s'agit généralement d'être capable de déterminer les valeurs extrémales des quantités locales que l'on vient d'introduire, sans nécessairement les relier à l'orientation de la facette considérée.

C'est le but de la représentation de Mohr, qui porte dans un système de deux axes orthonormés, la contrainte normale σ_{nn} en abscisse et la norme $\tau = \|\tau_\Sigma\|$ de la contrainte tangentielle, pour différentes orientations de la normale $\mathbf{n}$ à la facette au niveau du point $\mathbf{x} \in \Omega_t$ considéré. On peut alors montrer que, dans cette représentation plane, l'extrémité du vecteur contrainte est assujettie à se déplacer dans l'espace compris entre trois cercles dont les centres sont situés sur l'axe des abscisses, et dont les points d'intersection avec ce dernier ont pour coordonnées respectives les contraintes principales du tenseur σ au point $\mathbf{x} \in \Omega_t$ considéré. De façon logique, cette représentation, visible sur la figure 3.12 est appelée « tri-cercle de Mohr »; compte tenu du fait que c'est la norme de la contrainte tangentielle qui est reportée en ordonnée, il est fréquent de ne représenter que les demi-cercles situés au-dessus de l'axe des abscisses.

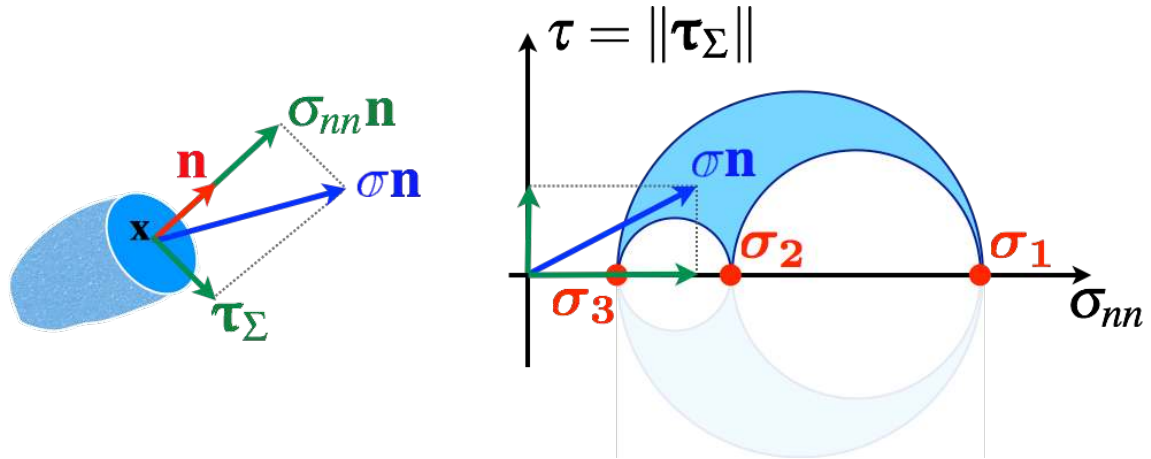


FIGURE 3.12 – Tri-cercle de Mohr.

R Ce résultat remarquable s'obtient en se plaçant dans la base $(\phi_1^\sigma, \phi_2^\sigma, \phi_3^\sigma)$ des directions propres du tenseur des contraintes au point considéré; en notant (n_1, n_2, n_3) les composantes dans cette base de la normale $\mathbf{n}$, on peut écrire que les composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte s'expriment comme :

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \tau^2 &= \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_{nn}^2\end{aligned}$$

Sachant en outre que $\|\mathbf{n}\|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, on peut exprimer les carrés des composantes de la normale $\mathbf{n}$ en fonction des contraintes normale et tangentielle :

$$\begin{aligned}n_1^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_2)(\sigma_{nn} - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_3)(\sigma_{nn} - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_1)(\sigma_{nn} - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}\end{aligned}$$

En rappelant que l'on classe les contraintes principales de façon décroissante ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), le fait d'expliciter que, nécessairement, $n_k^2 \geq 0$ (pour $1 \leq k \leq 3$) permet d'obtenir les conditions suivantes sur

le lieu de l'extrémité du vecteur $\sigma \mathbf{n}$ dans le plan de Mohr :

$$\tau^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_2)(\sigma_{nn} - \sigma_3) \geq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_3)(\sigma_{nn} - \sigma_1) \leq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_{nn} - \sigma_1)(\sigma_{nn} - \sigma_2) \geq 0$$

soit encore :

$$\left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

$$\left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

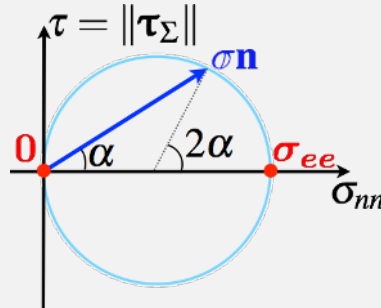
$$\left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2$$

ce qui correspond effectivement à la zone comprise entre trois cercles, tangents deux à deux, et coupant l'axe des abscisses en σ_1 , σ_2 et σ_3 .

Dans le cas où deux contraintes principales sont égales, les trois cercles ne se réduisent alors plus qu'à un seul cercle, sur lequel l'extrémité du vecteur contrainte est assujettie à se déplacer, comme on le constate dans l'exemple ci-dessous.

Les développements précédents s'appliquent bien sûr au cas de tout tenseur symétrique, et donc, en particulier, au tenseur des déformations de Green-Lagrange, et au tenseur des petites déformations. Les cercles de Mohr sont par exemple très utilisés pour le dépouillement graphique des rosettes de jauges de déformation.

■ **Exemple 3.3 — Essai de traction simple : représentation de Mohr.** Dans le cas de l'essai de traction simple, on a vu dans l'exemple 3.2 que les contraintes principales associées étaient σ_{ee} et 0 (valeur propre double). Le tri-cercle de Mohr se réduit donc à un seul cercle, représenté ci-dessous, sur lequel se déplace l'extrémité du vecteur contrainte.



Plus précisément, en posant α l'angle entre la direction $\mathbf{e}$ de traction et la normale $\mathbf{n}$ à la facette, on retrouve comme dans l'exemple 3.1 que :

$$\sigma_{nn} = \sigma_{ee} \cos^2 \alpha = \frac{\sigma_{ee}}{2} (1 + \cos(2\alpha))$$

$$\tau = \frac{\sigma_{ee}}{2} |\sin(2\alpha)|$$

ce qui, dans ce cas précis, permet de visualiser directement l'angle α sur la représentation de Mohr. ■

3.2.2 Critères de rupture par clivage

Le premier critère présenté ici concerne le cas de la rupture fragile, évoqué dans le paragraphe 3.1.2; le phénomène microscopique associé correspond à la séparation de plans d'atomes suite à l'application d'efforts normaux à ces derniers. Dans le cas d'un matériau monocristallin occupant le domaine Ω_t à l'instant t , les plans de clivage, qui sont ceux susceptibles de rompre en premier, sont parfaitement connus, et sont caractérisés par les orientations $\mathbf{n}_k$ ($1 \leq k \leq N$) de leurs normales respectives. Dans ce cas, le matériau résiste si les contraintes normales $\sigma_{n_k n_k}$ selon ces

plans, en tout point et à l'instant considéré, sont inférieures au seuil de clivage :

$$\max_{1 \leq k \leq N} \sigma_{n_k n_k}(\mathbf{x}, t) = \max_{1 \leq k \leq N} \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}_k, \mathbf{n}_k \rangle < \sigma_c, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \forall t$$

où σ_c désigne la contrainte seuil de clivage du matériau étudié. Réciproquement, il y a clivage dès que, en au moins un point $\mathbf{x}_O$ du domaine, il existe une direction $\mathbf{n}_l$ du cristal telle que l'on ait :

$$\sigma_{n_l n_l}(\mathbf{x}_O, t) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_O, t) \mathbf{n}_l, \mathbf{n}_l \rangle = \sigma_c$$

Dans le cas d'un matériau polycristallin, composé d'une multitude de cristaux (ou « grains ») d'orientations quelconques, ou encore dans le cas de matériaux amorphes, qui sont sans structure cristalline, la généralisation la plus simple du critère précédent est de supposer que toutes les facettes jouent un rôle équivalent vis-à-vis du clivage, d'où le critère suivant.

Critère de la contrainte normale maximale. Dans le cas des matériaux fragiles sujets au clivage, le critère de la contrainte normale maximale spécifie que la rupture par clivage surviendra dès que, en un point du domaine matériel, la contrainte normale sur une facette atteindra une valeur seuil σ_r , indépendante de l'orientation de la facette, et qui peut être déterminée par un essai de caractérisation macroscopique (tel qu'un essai de traction par exemple). Ainsi, il n'y a pas de rupture si :

$$\max_{\|\mathbf{n}\|=1} \sigma_{nn}(\mathbf{x}, t) < \sigma_r, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \forall t$$

et, à l'inverse, la rupture se produit dès qu'il existe $\mathbf{x}_O \in \Omega_t$ tel que :

$$\max_{\|\mathbf{n}\|=1} \sigma_{nn}(\mathbf{x}_O, t) = \sigma_r$$

La facette qui se rompt est donc la facette qui a subi la plus grande contrainte normale, toutes facettes confondues ; la représentation de Mohr, visible sur la figure 3.13, permet d'établir immédiatement qu'il s'agit en fait de la contrainte principale majeure (σ_1) au point considéré :

$$\max_{\|\mathbf{n}\|=1} \sigma_{nn}(\mathbf{x}, t) = \sigma_1(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \forall t$$

et que le respect du critère consiste donc à être dans la situation décrite sur la figure.

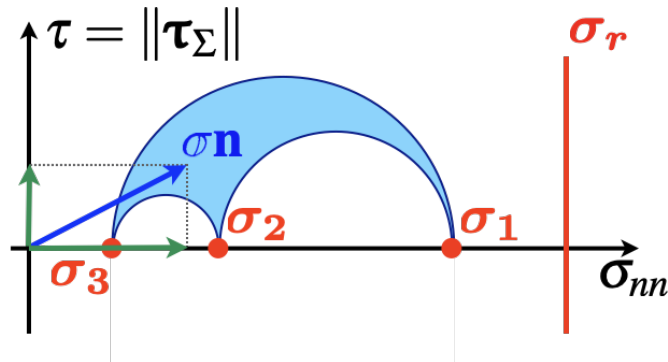


FIGURE 3.13 – Tri-cercle de Mohr : respect du critère de la contrainte normale maximale.

■ **Exemple 3.4 — Résistance à la traction du béton.** Le béton est un bon exemple de matériau fragile qui rompt par clivage ; il s'agit en fait d'une céramique (le ciment), renforcée par des particules (les grains de sable et les pierres), et qui présente une résistance extrêmement faible au clivage, à savoir quelques MPa tout au plus. Ceci implique que l'on préfère souvent considérer ce matériau comme « intolérant » à la moindre traction, et dire qu'il y a rupture dès que :

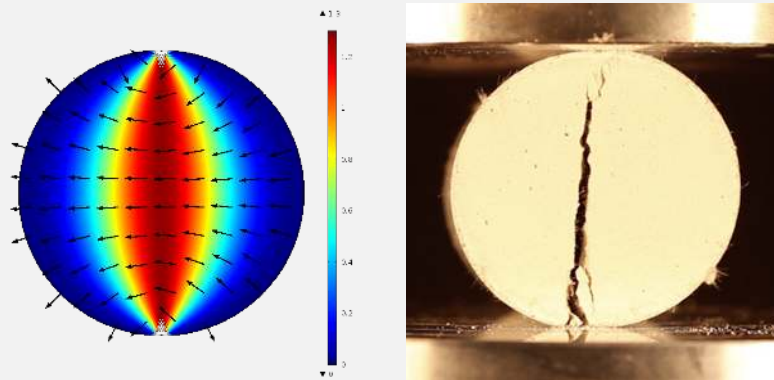
$$\max_{\|\mathbf{n}\|=1} \sigma_{nn} > 0$$

en un point de la structure considérée.

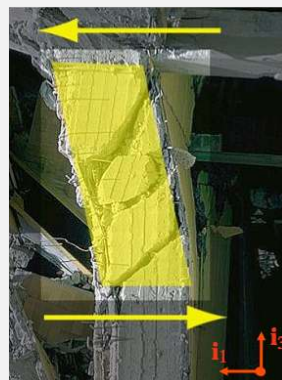
En pratique, ceci explique pourquoi la détermination de cette résistance à la traction ne peut s'effectuer à l'aide d'un essai de traction classique, car la rupture se ferait beaucoup trop rapidement pour pouvoir en déduire une valeur fiable. La résistance à la traction se détermine alors à l'aide d'un essai « brésilien », qui consiste à comprimer un cylindre de béton selon un diamètre. On peut alors montrer que la contrainte principale majeure est maximale en tout point de ce diamètre, et vaut :

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega_t} \sigma_I(\mathbf{x}) = \frac{2P}{\pi DH}$$

où P est la force de compression, et D et H sont respectivement le diamètre et la hauteur de l'éprouvette cylindrique. Pour des tailles d'éprouvettes classiques ($D \approx H \approx 10\text{cm}$), la force de compression à rupture est alors de l'ordre de la dizaine de kN, ce qui garantit une bonne précision expérimentale. La figure ci-dessous permet de comparer le résultat d'un calcul numérique (où les couleurs sont associées à la contrainte principale majeure, exprimée en MPa, et les flèches représentent la direction principale associée, en chaque point) à la fissuration au cours d'un essai.



Ce critère permet également d'interpréter le mode de ruine de piliers en béton soumis à une sollicitation sismique, que l'on voit ci-dessous.



Ce chargement peut, en première approximation, être modélisé comme une sollicitation de cisaillement uniforme dans le pilier :

$$\sigma = t(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_1)$$

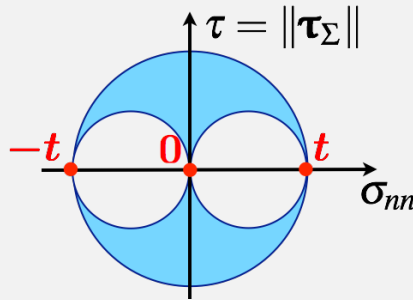
avec $t > 0$, et où $\mathbf{i}_3$ est vertical, vers le haut, et $\mathbf{i}_1$ est la direction du cisaillement sur les faces inférieure et supérieure du pilier. Les contraintes principales sont alors solutions de :

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_k \mathbb{I}) = -\sigma_k^3 + t^2 \sigma_k = 0$$

soit, en tout point (puisque le cisaillement est uniforme) :

$$\sigma_1 = t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -t$$

ce qui peut se visualiser dans la représentation de Mohr ci-dessous. La contrainte principale majeure σ_1 est donc strictement positive, et de direction propre associée $\boldsymbol{\phi}_1^\sigma = (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3)/\sqrt{2}$. Ceci permet donc de justifier *a posteriori* pourquoi les fissures forment un angle d'approximativement 45° par rapport à la verticale : cet angle correspond à l'orientation des facettes qui sont sollicitées en traction pure.



Résumé 3.1 — Dimensionnement selon un critère de rupture par clivage. Un domaine matériel Ω_t , dont le matériau, fragile, présente une résistance à la rupture par clivage σ_r , garde son intégrité si :

$$\sigma_1(\mathbf{x}, t) = \max_{\|\mathbf{n}\|=1} \sigma_{nn}(\mathbf{x}, t) < \sigma_r, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \forall t$$

où σ_1 et σ_{nn} sont respectivement la première contrainte principale, et la contrainte normale associée à une facette de normale $\mathbf{n}$. La rupture se produit alors au premier point $\mathbf{x}_O$ tel que, à l'instant t :

$$\sigma_1(\mathbf{x}_O, t) = \max_{\|\mathbf{n}\|=1} \sigma_{nn}(\mathbf{x}_O, t) = \sigma_r$$

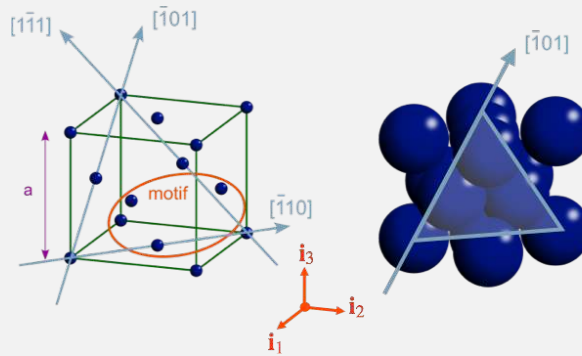
3.2.3 Critères de rupture par cisaillement

Dans le cas des matériaux ductiles, qui ont majoritairement une structure cristalline, on a vu dans le paragraphe 3.1.1 que des glissements pouvaient se produire selon certains plans atomiques privilégiés, créant des mouvements irréversibles qui provoquent la déformation plastique de l'éprouvette. Ainsi, dans le cas d'un matériau monocristallin occupant le domaine Ω_t à l'instant t , on peut énoncer un critère similaire à celui que nous avons établi pour la rupture par clivage ; il s'agit de la loi de Schmid qui, pour des directions de glissement $\mathbf{m}_k$ ($1 \leq k \leq N$) associées à des plans de normales respectives $\mathbf{n}_k$, permet d'établir qu'il n'y a pas de glissement plastique si les cisssions $\tau_{m_k n_k}$ selon ces directions, en tout point et à l'instant considéré, sont inférieures au seuil de glissement :

$$\max_{1 \leq k \leq N} \tau_{m_k n_k}(\mathbf{x}, t) = \max_{1 \leq k \leq N} \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}_k, \mathbf{m}_k \rangle < \tau_c, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \forall t$$

où τ_c est appelée cisssion critique.

■ Exemple 3.5 — Essai de traction sur un monocristal.

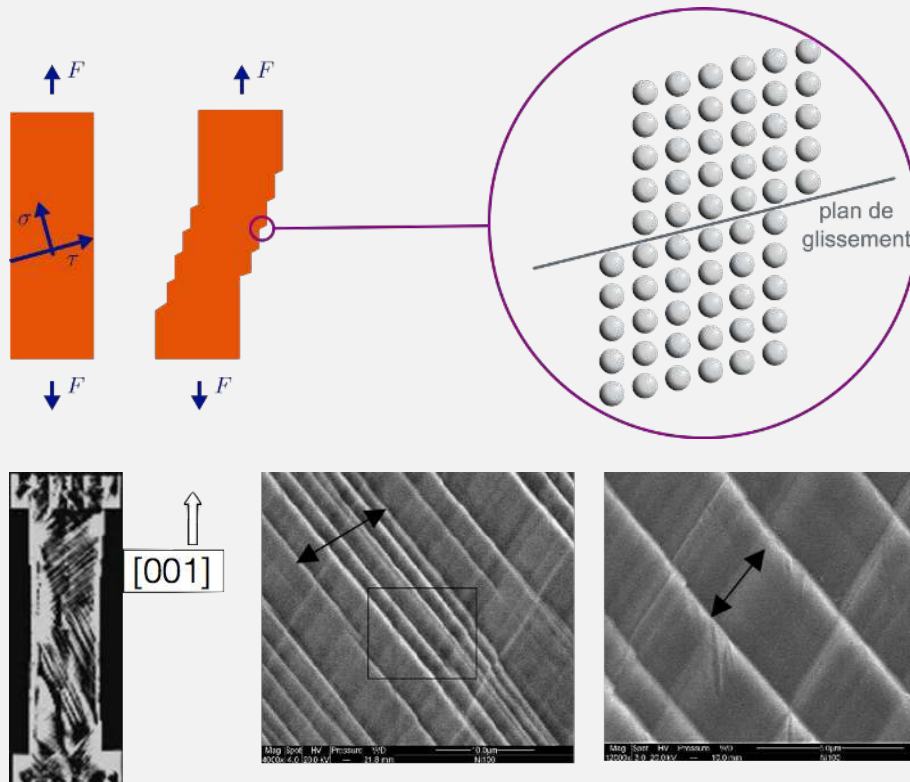


On considère un monocristal de type cubique à faces centrées, soumis à de la traction simple d'axe $\mathbf{e} = \mathbf{i}_3$ parallèle à l'axe « vertical » du cube représenté plus bas : $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ee} \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$. Le premier système de glissement activé a pour caractéristiques les plans de normale $\mathbf{n}_1 = (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)/\sqrt{3}$ (dont la trace sur le cube est représentée ci-dessus) et les directions de glissement $\mathbf{m}_1 = (-\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3)/\sqrt{2}$ (correspondant à la droite $[\bar{1}01]$ ci-dessus).

Le tenseur des contraintes étant supposé uniforme, la loi de Schmid permet alors d'établir qu'il n'y a pas de glissement si :

$$\tau_{m_1 n_1} = \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_1, \mathbf{m}_1 \rangle = \sigma_{ee} \langle \mathbf{i}_3, \mathbf{n}_1 \rangle \langle \mathbf{i}_3, \mathbf{m}_1 \rangle = \frac{\sigma_{ee}}{\sqrt{6}} < \tau_c$$

Dans le cas contraire, les plans concernés peuvent glisser, provoquant l'apparition de « marches » sur la surface de l'échantillon, comme représenté ci-dessous.



Les images ci-dessus (sous microscope optique à gauche, et sous microscope électronique à balayage au centre et à droite) permettent de visualiser ce phénomène dans le cas d'un échantillon monocristallin de nickel pur. ■

Critère basé sur cisaillement maximal

Dans le cas de matériaux polycristallins (composé d'une multitude de grains d'orientations quelconques), on peut, comme dans le cas du critère de clivage présenté précédemment, supposer que toutes les facettes jouent un rôle équivalent vis-à-vis du glissement, ce qui permet de proposer le critère suivant.

Critère de Tresca. Le critère de Tresca pour un matériau ductile spécifie que la sortie du domaine élastique se fera dès que, en un point du domaine matériel, la contrainte tangentielle sur une facette sera de norme supérieure à une valeur seuil τ_0 indépendante de l'orientation de la facette, et que l'on peut déterminer par un essai de caractérisation macroscopique (comme un essai de traction par exemple). Ainsi, on peut dire que l'on reste dans le domaine élastique si :

$$\max_{\|\mathbf{n}\|=1} \|\boldsymbol{\tau}_\Sigma(\mathbf{x}, t)\| < \tau_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t$$

et, inversement, la sortie du domaine élastique se fait dès qu'il existe $\mathbf{x}_O \in \Omega_t$ tel que :

$$\max_{\|\mathbf{n}\|=1} \|\boldsymbol{\tau}_\Sigma(\mathbf{x}_O, t)\| = \tau_0$$

La représentation de Mohr, visible sur la figure 3.14, permet de constater que la plus grande contrainte tangentielle (en norme) est égale au rayon du grand cercle, qui correspond à la demi-différence entre les contraintes principales majeure et mineure au point considéré :

$$\max_{\|\mathbf{n}\|=1} \|\boldsymbol{\tau}_\Sigma(\mathbf{x}, t)\| = \frac{\sigma_1(\mathbf{x}, t) - \sigma_3(\mathbf{x}, t)}{2}$$

et qu'elle est obtenue pour des facettes dont les normales sont les bissectrices des angles formés par les directions principales ϕ_1^σ et ϕ_3^σ , soit :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1^\sigma \pm \phi_3^\sigma)$$

En outre, l'exemple suivant permet d'établir que la valeur seuil en cisaillement est directement liée à la limite d'élasticité en traction σ_0 : $\tau_0 = \sigma_0/2$.

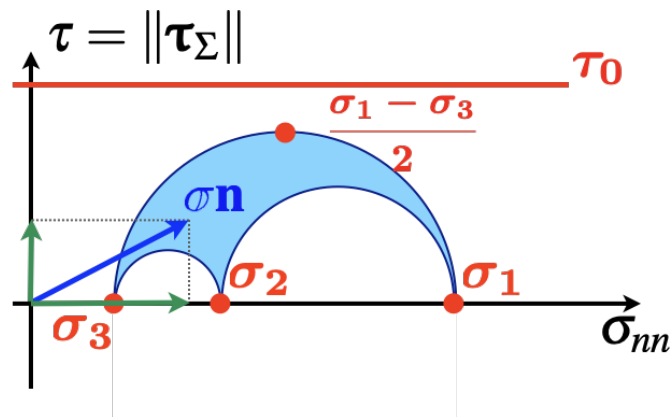


FIGURE 3.14 – Tri-cercle de Mohr : respect du critère de Tresca.

■ **Exemple 3.6 — Essai de traction sur un polycristal : critère de Tresca.** On considère un polycristal soumis à un essai de traction simple de direction $\mathbf{e}$: $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ee} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$. Le critère de Tresca permet d'affirmer que l'on reste dans le domaine élastique tant que :

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{ee}}{2} < \tau_0$$

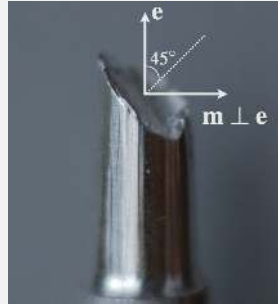
où les contraintes principales $\sigma_1 = \sigma_{ee}$ et $\sigma_3 = 0$ ont été déterminées dans l'exemple 3.2. Ceci montre que la valeur seuil τ_0 se détermine de façon simple à l'aide d'un essai de traction, en prenant $\tau_0 = \sigma_0/2$, où σ_0 est la limite d'élasticité en traction du matériau étudié.

Ce résultat est bien sûr cohérent avec l'expression de la norme de la contrainte tangentielle obtenue dans l'exemple 3.1 :

$$\|\boldsymbol{\tau}_\Sigma\| = \frac{\sigma_{ee} |\sin(2\alpha)|}{2}$$

où α désigne l'angle entre la direction $\mathbf{e}$ de traction et la normale $\mathbf{n}$ à la facette. En effet, cette norme est maximale pour $\alpha = 45^\circ$ et vaut $\|\boldsymbol{\tau}_\Sigma\|_{\max} = \sigma_{ee}/2$.

En outre, les facettes concernées sont inclinées de 45° par rapport à l'axe de la traction, ce qui correspond effectivement à des normales égales aux bissectrices des angles formés par la direction de traction $\mathbf{e}$ et n'importe quelle direction perpendiculaire à $\mathbf{e}$. Ceci peut être confirmé par l'expérience : pour certains matériaux et des conditions de chargement spécifiques, au lieu du faciès de rupture en forme de cône visible sur la figure 3.9, il est possible d'observer une rupture à peu près plane, et inclinée à 45° , comme le montre l'illustration ci-dessous, pour la rupture d'une éprouvette en aluminium.



R *Compte tenu de sa définition, la contrainte évaluée dans le critère de Tresca, que l'on appelle couramment « contrainte de Tresca », est un invariant du tenseur des contraintes, puisqu'elle ne dépend pas du choix de la base dans laquelle est exprimé ce dernier, et s'écrit simplement à l'aide des contraintes principales.*

Critère « alternatif »

Le critère de Tresca que l'on vient d'établir n'étant pas toujours en bon accord avec l'expérience, et nécessitant de plus le calcul des contraintes principales, une autre proposition est de définir un critère portant directement sur le tenseur des contraintes, ou du moins sur la partie de ce dernier qui est caractéristique du cisaillement, vu que c'est ce que l'on cherche à traduire ici. On introduit pour cela la décomposition suivante.

Décomposition orthogonale du tenseur des contraintes. On peut écrire en tout point du domaine le tenseur des contraintes comme la somme de deux tenseurs :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbb{I} + \boldsymbol{\sigma}_D = \frac{\text{tr } \boldsymbol{\sigma}}{3} \mathbb{I} + \boldsymbol{\sigma}_D$$

où $\sigma_m \mathbb{I}$ est la « partie sphérique » de $\boldsymbol{\sigma}$, qui représente la contrainte normale moyenne dans le domaine, et $\boldsymbol{\sigma}_D$ est appelé le « déviateur des contraintes », qui, par construction, est de trace

nulle car :

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma}_D = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbb{I}) = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \text{tr } \mathbb{I} = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{tr } \boldsymbol{\sigma}}{3} 3 = 0$$

Une représentation schématique de cette décomposition est donnée sur la figure 3.15.

La décomposition est qualifiée d'orthogonale, car elle l'est au sens du produit scalaire tensoriel, tel que défini dans l'annexe A.2.2 :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_D, \sigma_m \mathbb{I} \rangle = \text{tr}(\sigma_m \mathbb{I}^T \boldsymbol{\sigma}_D) = \sigma_m \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_D = 0$$

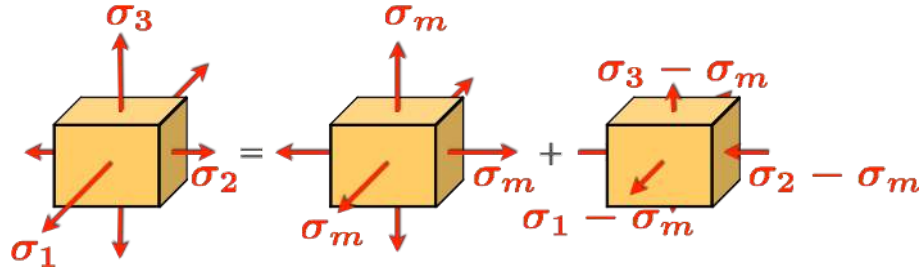


FIGURE 3.15 – Décomposition orthogonale du tenseur des contraintes (dans la base des directions principales).

Le déviateur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_D$ ainsi défini est un indicateur du cisaillement : en effet, s'il est nul, on a nécessairement $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbb{I}$ qui est isotrope, autrement dit, qui ne présente aucun cisaillement, quelle que soit la facette considérée. On définit alors un nouveau critère à partir de $\boldsymbol{\sigma}_D$.

Critère de von Mises. Le critère de von Mises pour un matériau ductile spécifie que la sortie du domaine élastique se fera dès que, en un point matériel, la contrainte équivalente de von Mises σ_{eq} sera supérieure à la limite d'élasticité en traction σ_0 . On reste donc dans le domaine élastique si :

$$\sigma_{eq}(\mathbf{x}, t) < \sigma_0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \forall t$$

où la définition de la contrainte de von Mises, en tout point et à chaque instant, est liée à la norme tensorielle du déviateur des contraintes (telle que définie dans l'annexe A.2.2) :

$$\sigma_{eq}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{3}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_D(\mathbf{x}, t)\|^2} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_D(\mathbf{x}, t)^2)}$$

vu que $\boldsymbol{\sigma}_D$ est symétrique. Inversement, la sortie du domaine élastique se fait dès qu'il existe $\mathbf{x}_0 \in \Omega_t$ tel que :

$$\sigma_{eq}(\mathbf{x}_0, t) = \sigma_0$$

R Le critère précédent peut également avoir une interprétation énergétique : en effet, on peut montrer que la contrainte de von Mises est liée à ce que l'on définit comme l'énergie de déformation élastique de distorsion, impliquant ainsi que le critère peut traduire le fait que l'on entre en plasticité dès que cette énergie atteint un certain seuil.

En outre, quelle que soit l'interprétation adoptée, on constate que la contrainte de von Mises est un invariant du tenseur des contraintes, qui peut s'exprimer en fonction des contraintes principales comme :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

■ **Exemple 3.7 — Essai de traction sur un polycristal : critère de von Mises.** On considère un polycristal soumis à un essai de traction simple de direction $\mathbf{e} = \mathbf{i}_3$: $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ee} \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$, avec $\sigma_{ee} > 0$. Le critère de von Mises permet d'affirmer que l'on reste dans le domaine élastique tant que :

$$\sigma_{eq} < \sigma_0$$

où σ_0 est la limite d'élasticité en traction du matériau étudié. Dans le cas présent, la contrainte équivalente de von Mises s'exprime comme :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_D^2} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr} \left(\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\sigma_{ee}}{3} \mathbb{I} \right)^2 \right)}$$

compte tenu de la définition du déviateur des contraintes : $\boldsymbol{\sigma}_D = \boldsymbol{\sigma} - (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbb{I} / 3$. On obtient alors :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr} \left(\left(-\frac{\sigma_{ee}}{3} (\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2) + \frac{2\sigma_{ee}}{3} \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \right)^2 \right)} = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_{ee}^2}{9} + \frac{\sigma_{ee}^2}{9} + \frac{4\sigma_{ee}^2}{9} \right)} = \sigma_{ee}$$

vu que $\text{tr}(\mathbb{A}^2) = A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{33}^2 + 2A_{12}^2 + 2A_{13}^2 + 2A_{23}^2$ pour un tenseur $\mathbb{A}$ symétrique, de composantes A_{mn} dans la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$.

Dans le cas de l'essai de traction, la contrainte équivalente de von Mises σ_{eq} est donc directement égale à la valeur de la contrainte uniaxiale, ce qui justifie *a posteriori* le coefficient $3/2$ dans la définition de σ_{eq} . Le critère de von Mises se réduit donc dans ce cas à :

$$\sigma_{ee} < \sigma_0$$

pour garantir que l'on reste dans le domaine élastique. ■

Résumé 3.2 — Dimensionnement selon un critère de rupture par cisaillement. Un domaine matériel Ω_t , dont le matériau, ductile, présente une limite d'élasticité σ_0 , reste dans sa zone de comportement élastique s'il respecte l'un des deux critères suivants, à choisir selon le matériau étudié :

— critère de Tresca :

$$\frac{\sigma_1(\mathbf{x}, t) - \sigma_3(\mathbf{x}, t)}{2} = \max_{\|\mathbf{n}\|=1} \|\boldsymbol{\tau}_\Sigma(\mathbf{x}, t)\| < \frac{\sigma_0}{2}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t$$

où σ_1 et σ_3 sont les contraintes principales majeure et mineure respectivement, et $\boldsymbol{\tau}_\Sigma$ est la contrainte de cisaillement associée à une facette de normale $\mathbf{n}$;

— critère de von Mises :

$$\sigma_{eq}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr} (\boldsymbol{\sigma}_D(\mathbf{x}, t)^2)} < \sigma_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t$$

où $\boldsymbol{\sigma}_D(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) / 3 \mathbb{I}$ est le déviateur des contraintes.

L'entrée en plasticité se produit alors localement au premier point $\mathbf{x}_0$ tel que, à l'instant t , le critère sélectionné pour le matériau n'est plus vérifié, soit, respectivement :

$$\frac{\sigma_1(\mathbf{x}_0, t) - \sigma_3(\mathbf{x}_0, t)}{2} = \max_{\|\mathbf{n}\|=1} \|\boldsymbol{\tau}_\Sigma(\mathbf{x}_0, t)\| = \frac{\sigma_0}{2}$$

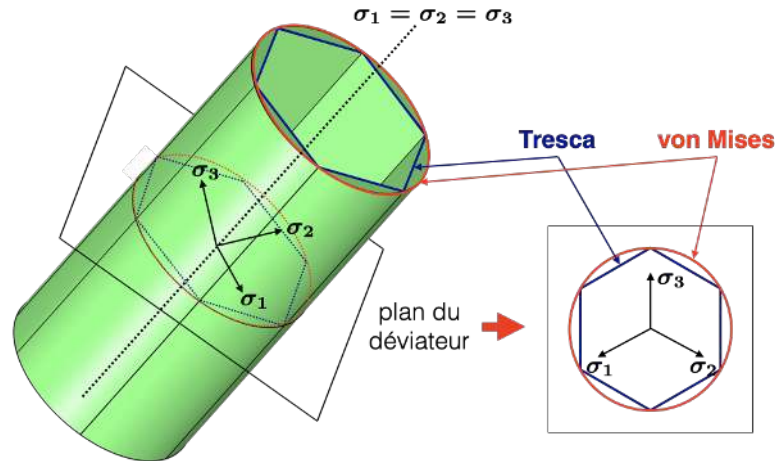
$$\sigma_{eq}(\mathbf{x}_0, t) = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr} (\boldsymbol{\sigma}_D(\mathbf{x}_0, t)^2)} = \sigma_0$$



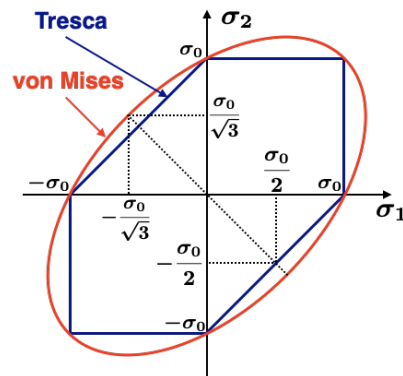
Il est intéressant de comparer les critères de Tresca et de von Mises, pour une même limite d'élasticité σ_0 . Tout d'abord, les deux critères ont bien sûr comme propriété commune d'être insensibles à la pression : en effet, si l'état de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est admissible, $\boldsymbol{\sigma} + p \mathbb{I}$ est également admissible, quelle que soit la pression p .

Par ailleurs, les deux critères peuvent facilement se représenter dans la base tridimensionnelle des

contraintes principales. Par définition, le critère de von Mises peut se représenter comme un cylindre de révolution, de rayon σ_0 , et d'axe la droite correspondant au tenseur identité (de composantes $(1,1,1)$ par conséquent dans cette base); de même, on peut montrer que le critère de Tresca prend la forme d'un cylindre de base hexagonale de côté σ_0 et d'axe de même direction. Les deux critères sont représentés sur les figures ci-dessous.



Une projection de ces critères, intéressante à analyser, correspond au cas où l'une des contraintes principales (σ_3 par exemple) est nulle. Dans ce cas, les courbes obtenues pour les critères de von Mises et Tresca sont représentées ci-dessous.



3.2.4 Autres critères

Nous nous sommes volontairement limités dans ce qui précède à la présentation des critères les plus utilisés pour le dimensionnement de pièces ou de structures à base de matériaux métalliques, ou céramiques. Il en existe une multitude d'autres, certains pouvant porter sur le tenseur des déformations plutôt que sur le tenseur des contraintes (voir par exemple [Lem+09; RHB07]); quoi qu'il en soit, tous ont pour point commun de traduire à l'échelle macroscopique les phénomènes qui se produisent à une échelle microscopique. À défaut d'être exhaustif, voici deux critères qui permettent de constater la diversité des formes possibles.

Critère de Tsai-Hill

Dans le cas de matériaux dont la microstructure est fortement anisotrope, il est nécessaire de disposer d'un critère qui soit lié aux différentes directions caractéristiques du milieu. C'est par exemple le cas des matériaux composites à fibres longues, dont la structure est présentée sur la figure 3.16, et pour lesquels la résistance à la rupture peut être dix fois plus importante pour un essai de traction selon la direction des fibres que selon une direction perpendiculaire, comme on l'a vu dans le tableau 3.1. Ces matériaux sont généralement fabriqués sous la forme de couches planes (ou « plis ») pour lesquelles les directions des fibres sont toutes identiques.

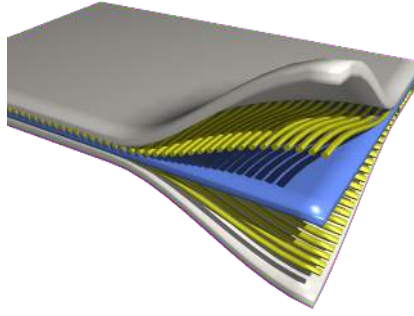


FIGURE 3.16 – Exemple d'un matériau composite à fibres longues (deux plis représentés).

Dans le cas d'une plaque mince de plan $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$, pour laquelle on n'a qu'une seule direction de fibres en présence, le critère de résistance peut s'écrire (en faisant l'hypothèse que la contrainte selon la troisième direction $\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2$ est négligeable) :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X^2} + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}}{S}\right)^2 < 1$$

où l'on s'est placé dans une base locale liée à la direction des fibres de la plaque ($\mathbf{e}_L$: direction des fibres, $\mathbf{e}_T$ direction du plan, qui est perpendiculaire à celle des fibres) :

$$\sigma_L = \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_L, \mathbf{e}_L \rangle, \quad \sigma_T = \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_T \rangle, \quad \tau_{LT} = \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_L, \mathbf{e}_T \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_T, \mathbf{e}_L \rangle$$

et les résistances associées, mesurées à l'aide d'essais spécifiques, sont respectivement notées X , Y et S . La figure 3.17 permet de visualiser le domaine où le critère est vérifié, pour différentes valeurs de la contrainte de cisaillement local τ_{LT} . Plus de précisions peuvent être trouvées dans [CBG13].

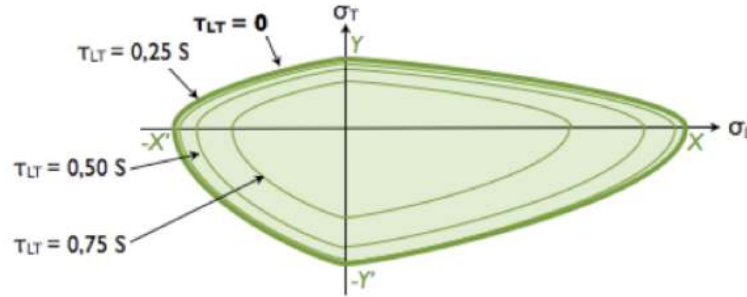


FIGURE 3.17 – Visualisation du critère de Tsai-Hill dans le plan des contraintes (σ_L, σ_T) .

Critère de Mohr-Coulomb

Un autre critère, très employé dans le cas de milieux granulaires, ou poreux, est le critère de Mohr-Coulomb, qui permet de prendre en compte l'accroissement de la résistance au cisaillement du milieu quand la pression appliquée augmente (ce qui justifie *a posteriori* l'intérêt de compacter un sol). Ce critère peut notamment être utilisé dans le cas du béton, même s'il existe d'autres critères spécifiques et plus précis pour ce matériau). Pour qu'il y ait résistance, il faut que :

$$\|\boldsymbol{\tau}_\Sigma\| + \sigma_m \tan \phi < c$$

où c représente la cohésion du milieu, qui désigne la résistance au cisaillement du milieu en cas de pression nulle, et ϕ est l'angle de frottement caractérisant la résistance du milieu due aux forces de

frottement entre les grains de ce milieu. La visualisation de ce critère est immédiate à l'aide de la représentation de Mohr : elle consiste à dire que le tri-cercle de Mohr doit rester en-dessous de la droite d'équation $\tau = c - \sigma_{nn} \tan \phi$ pour que le matériau reste sain. La figure 3.18 représente deux états de contraintes différents vérifiant ce critère, et permet de constater la meilleure résistance du milieu quand la pression augmente, c'est-à-dire quand le tri-cercle se déplace vers la gauche.

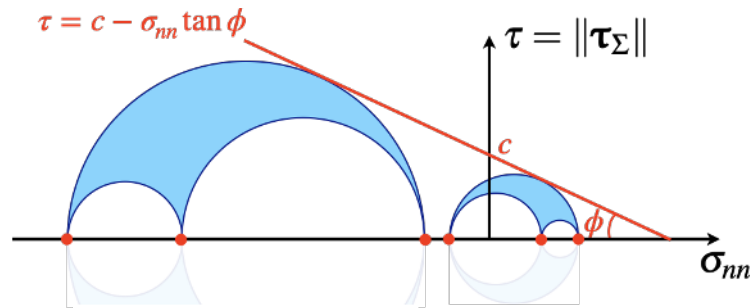


FIGURE 3.18 – Visualisation du critère de Mohr-Coulomb dans le plan de Mohr.



Dans toute cette partie, nous nous sommes limités au cas de sollicitations monotones qui vont jusqu'à la rupture. Une autre classe de sollicitations, importante à considérer, concerne les efforts périodiques, qui peuvent conduire à la ruine du matériau après un nombre plus ou moins conséquent de cycles, et pour des amplitudes de sollicitations pourtant bien moindres que dans le cas monotone. On parle alors de rupture par fatigue du matériau. Plus de précisions peuvent être trouvées dans [Lem+09; RHB07].

Par ailleurs, pour être totalement exhaustif, il faudrait aussi évoquer toutes les causes autres que mécaniques qui peuvent conduire à la rupture : thermiques, chimiques, ...

3.3 Concentrations de contraintes

Un point essentiel dont il faut tenir compte dans les pièces ou les structures que l'on cherche à dimensionner est que la présence de défauts, tels que des trous, tend à augmenter significativement le niveau des contraintes attendu, et peut ainsi conduire rapidement à la ruine de la pièce. De la même manière, certaines formes sont à proscrire pour la géométrie, sous peine là encore d'augmenter les contraintes en présence. La figure 3.19 permet de constater ce phénomène sur des éprouvettes de compression sur lesquelles on visualise le champ des contraintes par photoélasticité. Bien entendu, ces variations sont liées au comportement élastique du matériau, et seraient différentes pour un autre type de comportement. Plus de précisions sur le sujet pourront être trouvées dans [JL98].

3.3.1 Influence d'un trou

Un premier exemple typique permettant de se rendre compte de la nature du phénomène consiste à étudier l'influence d'un trou sur un champ de contraintes qui serait, sinon, uniforme. Ce cas de figure va permettre de constater que l'augmentation locale des contraintes qui en résulte n'est pas liée à la réduction de l'aire de la section effectivement à même de supporter les efforts internes ; on va alors parler de « concentration de contrainte » pour désigner ce phénomène. L'estimation de ces dernières peut s'obtenir par la résolution du problème d'élasticité associé, comme défini dans le chapitre 5. Dans ce qui suit, on montre comment la simulation numérique peut être un moyen efficace d'évaluation de ces phénomènes.

Plaque avec trou circulaire en traction simple

Un cas de figure qu'il est possible de traiter analytiquement est celui d'une plaque, soumise à une sollicitation de traction simple suivant l'un de ces axes ($\sigma = \sigma_{\infty} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1$), et qui présente en son

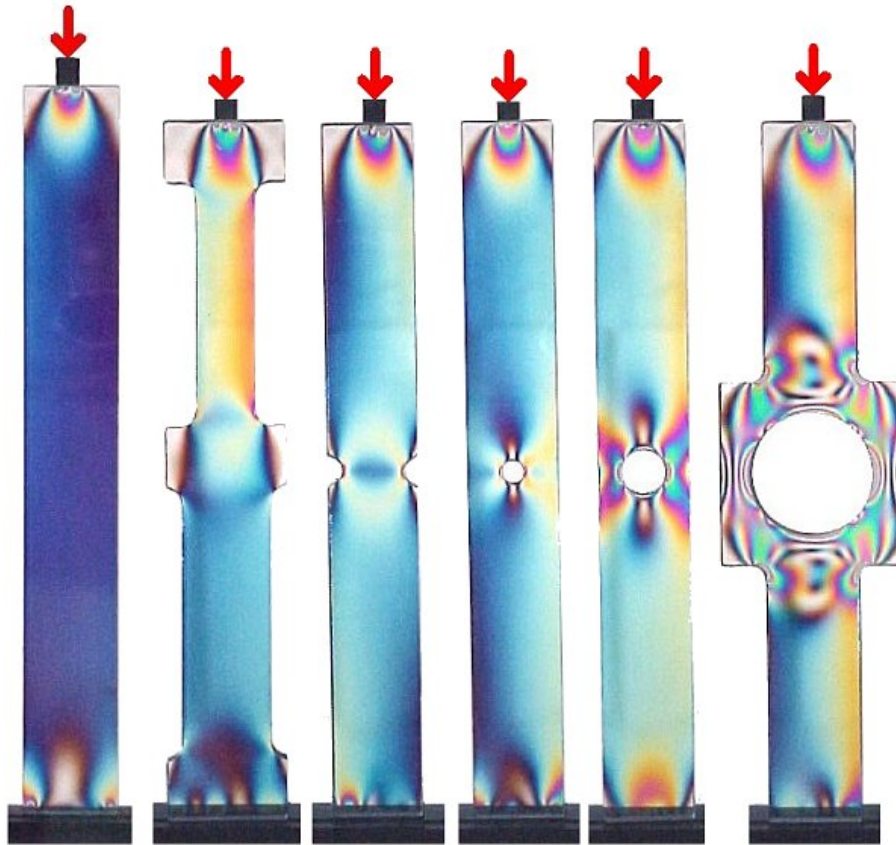


FIGURE 3.19 – Influence de défauts sur le champ des contraintes d’une éprouvette en compression : visualisation des franges isochromatiques obtenues par photoélasticité.

centre un trou circulaire de dimensions significativement plus petites que les dimensions latérales de la plaque, si bien que l’on peut considérer qu’il n’y a pas d’influence des conditions de bord libre, au niveau du côté de la plaque, sur le champ de contraintes au bord du trou.

La figure 3.20 permet de visualiser les deux composantes σ_{11} (en bas à droite) et σ_{22} (en bas à gauche) du champ de contraintes, obtenues par simulation numérique sur le quart supérieur droit de la géométrie (la solution étant symétrique par rapport aux deux plans médians de la plaque). On constate :

- d’une part, qu’il existe une zone en compression, « avant » et « après » le trou selon la direction longitudinale de l’éprouvette ; cette zone est ainsi dominée par des contraintes transverses (σ_{22}) négatives, le minimum étant directement l’opposé de la contrainte de traction σ_{∞} appliquée à la plaque ;
- d’autre part, qu’il existe une zone fortement en traction au niveau du trou, dans une direction perpendiculaire à celle de la sollicitation ; les contraintes longitudinales (σ_{11}), juste au bord du trou, s’élèvent à trois fois la contrainte de traction σ_{∞} appliquée à la plaque.

On définit alors le coefficient de concentration de contrainte, noté K_t , comme le rapport entre la contrainte maximale, obtenue à cause du défaut, et la contrainte nominale que l’on aurait observée en l’absence du défaut, soit ici : $K_t = 3$.

On constate notamment que ce coefficient ne dépend pas du rayon du trou, mais seulement de la géométrie du défaut, comme le confirme ce qui suit.

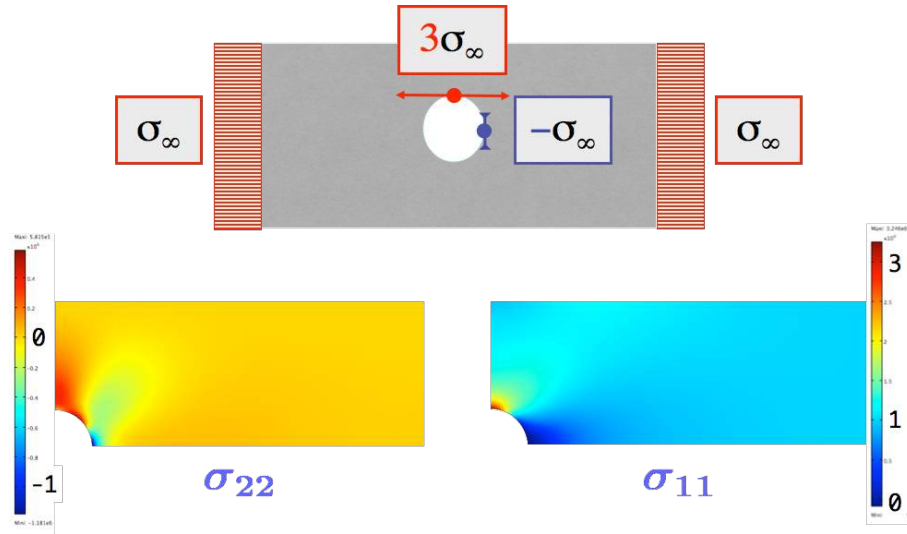


FIGURE 3.20 – Champ de contraintes dans une plaque avec un trou circulaire.

Du trou à la fissure

Si maintenant on considère un trou de forme elliptique, de demi-axes a et b respectivement selon $\mathbf{i}_2$ et $\mathbf{i}_1$, une sollicitation de traction identique au cas précédent permet d'obtenir, par simulation numérique, une composante σ_{11} représentée sur la figure 3.21 (sur un quart de la géométrie).

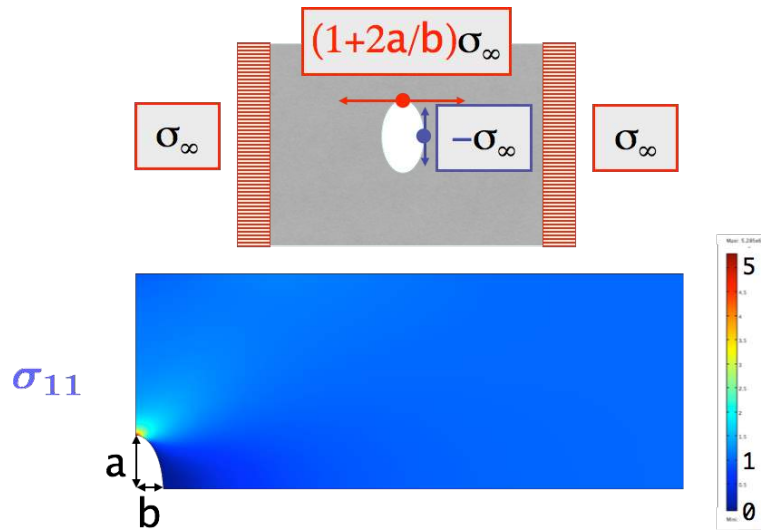


FIGURE 3.21 – Champ de contraintes dans une plaque avec un trou elliptique.

On constate alors que, même si les concentrations de contraintes sont beaucoup plus confinées à proximité du trou, la valeur maximale de la contrainte longitudinale (σ_{11}) implique désormais un coefficient de concentration de contrainte :

$$K_t = 1 + 2\frac{a}{b}$$

soit une contrainte longitudinale maximale, située à 90° au bord du trou, égale au quintuple de la contrainte nominale σ_∞ dans le cas d'un trou deux fois plus large que long.

Dans le cas extrême où le trou est suffisamment mince pour que l'on puisse plutôt le percevoir comme une fissure, il est possible d'établir que c'est le rayon de courbure minimal ρ du trou qui est dimensionnant, en intervenant dans le facteur de concentration de contrainte comme :

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

La figure 3.22 permet d'observer l'évolution de la contrainte longitudinale (σ_{11}), obtenue par simulation numérique sur un quart de géométrie. On peut ainsi conclure que, plus le défaut a une forme géométrique « marquée » (au sens de la variation plus ou moins rapide de sa frontière), plus l'intensité des concentrations de contraintes est importante. La figure 3.23, qui montre les franges isochromatiques du champ de contraintes obtenues par photoélasticité, permet de le confirmer.

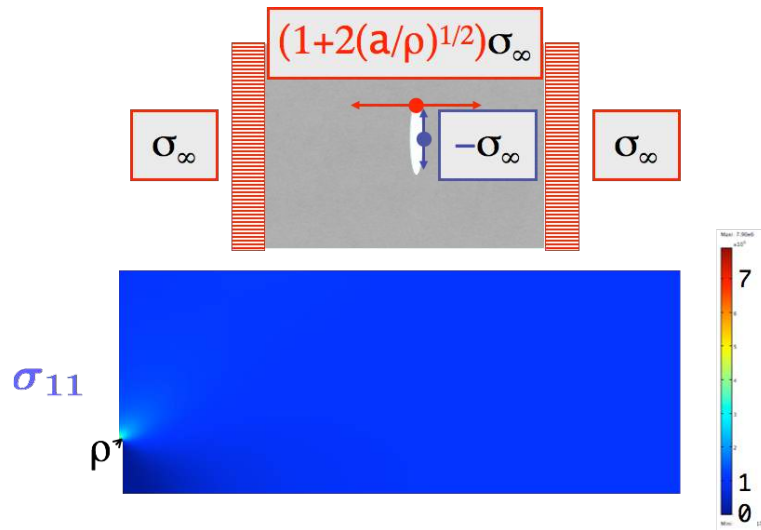


FIGURE 3.22 – Champ de contraintes dans une plaque avec une fissure.

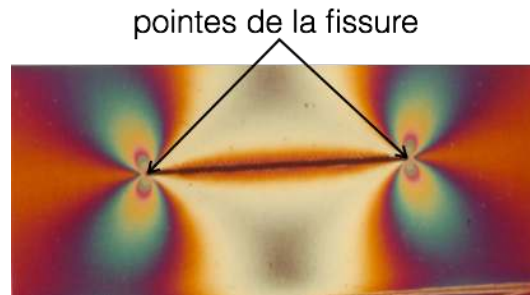
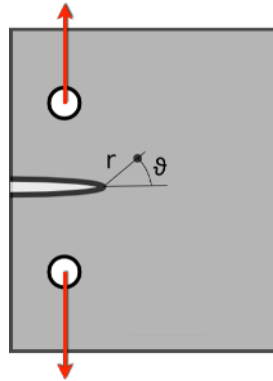


FIGURE 3.23 – Champ de contraintes autour d'une fissure, observé par photoélasticité (franges isochromatiques).

R Dans le cas limite où le rayon de courbure ρ est nul, on trouve une contrainte infinie en pointe de fissure. Le cadre de la mécanique de la rupture (dans le cas plan) permet d'ailleurs de préciser la forme asymptotique du champ des contraintes au voisinage de ce point singulier :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &\sim \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[5 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &\sim \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{r\theta} &\sim \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]\end{aligned}$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires prenant comme origine la pointe de fissure. C'est alors le coefficient K_I , appelé facteur d'intensité des contraintes, qui caractérise l'intensité du champ au voisinage de la pointe de fissure, et, par conséquent, la capacité du matériau à plus ou moins bien résister à la propagation de la fissure. Ce coefficient peut être mesuré expérimentalement à l'aide d'essais spécifiques tels que des essais de traction sur des éprouvettes entaillées, dites « éprouvettes CT » (pour Compact Tension), dont la géométrie est représentée schématiquement ci-dessous. Plus de précisions peuvent être trouvées dans [Lem+09; RHB07].



En réalité, le champ des contraintes ne peut bien sûr pas être singulier en pointe de fissure : il existe une zone de plasticité confinée qui vient limiter les valeurs extrêmes des contraintes, sans que l'estimation expérimentale du facteur d'intensité des contraintes n'en soit perturbée de façon significative.

3.3.2 Influence de la géométrie

De façon similaire, les variations de la géométrie de la structure peuvent avoir une influence forte sur l'évolution du champ de contraintes. La figure 3.24 permet de constater en photoélasticité que, à forme globale et chargement fixés, la présence de coins rentrants influe localement, et de façon significative, sur la variation spatiale du champ des contraintes, mais aussi sur les valeurs extrêmes de ces dernières.

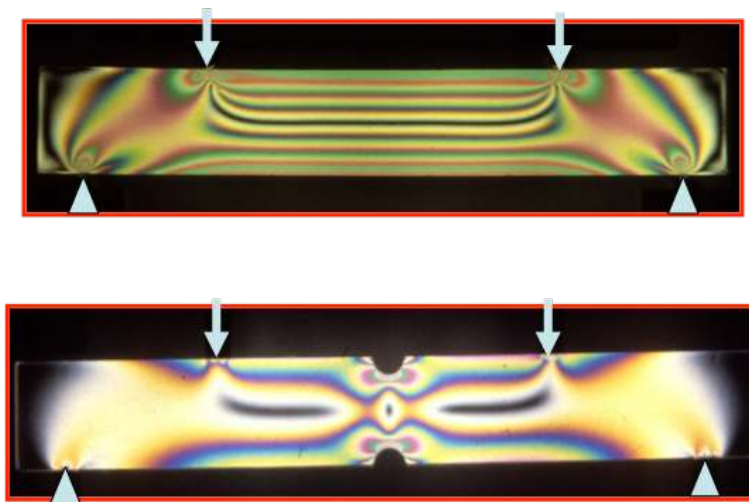


FIGURE 3.24 – Influence de la présence de coins rentrants : observations en photoélasticité (franges isochromatiques).

Ces constatations permettent de justifier *a posteriori* la forme adoptée pour les éprouvettes de traction, et, plus précisément, la présence de congés de raccordement entre les têtes et la zone utile de l'éprouvette, comme évoqué dans le paragraphe 3.1.1. Ces congés permettent de limiter l'influence d'une variation brusque de géométrie, comme un changement de section ; en effet, la figure 3.25 permet de comparer, sur une éprouvette de traction en matériau photoélastique,

l'évolution du champ de contraintes entre une variation brusque de section (à gauche) et une variation « adoucie » par le congé (à droite) : dans ce dernier cas, les raies de couleur sont moins rapprochées qu'au voisinage immédiat de l'angle droit rentrant du côté gauche de l'éprouvette.

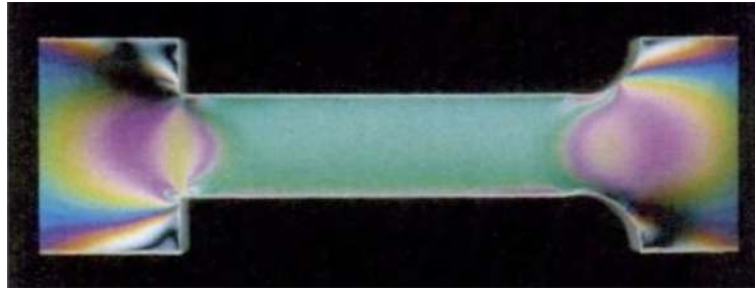


FIGURE 3.25 – Influence d'un congé de raccordement sur une éprouvette de traction : observations en photoélasticité (franges isochromatiques).

Afin de dimensionner efficacement de telles éprouvettes, on peut utiliser des abaques tels que celui de la figure 3.26, qui permet d'estimer le coefficient de concentration de contrainte pour un arbre sollicité en traction, dont la variation de section est réalisée à l'aide d'un congé de raccordement ; à rapport de diamètres D/d fixé, le coefficient K_t augmente quand le rayon r du congé diminue, et cette augmentation est d'autant plus forte que ce rayon diminue.

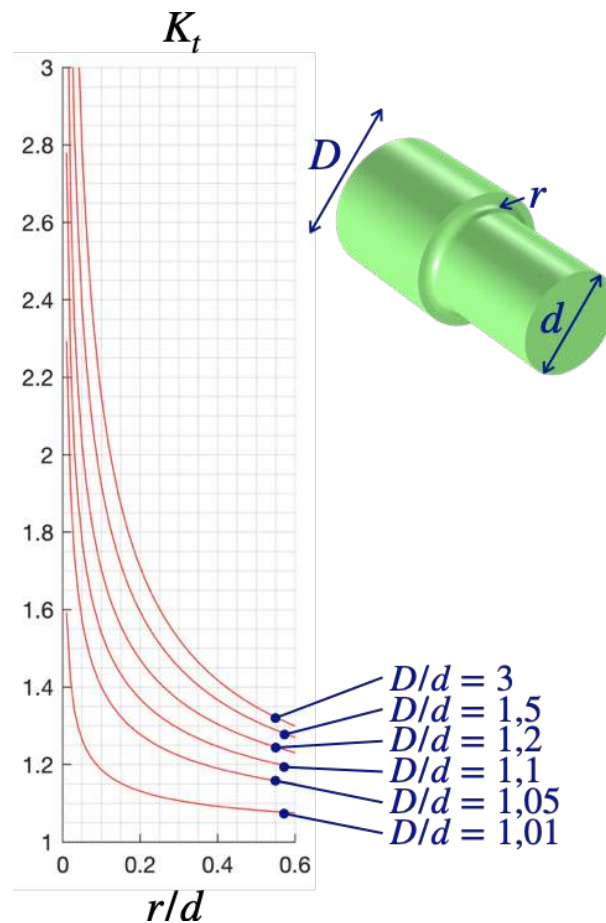


FIGURE 3.26 – Abaque pour estimer le coefficient de concentration de contrainte dans le cas d'un arbre en traction avec épaulement.

3.4 Résumé des formules importantes

Dimensionnement selon un critère de rupture par clivage – Résumé 3.1 page 85

$$\text{pas de rupture si } \sigma_1 = \max_{\|\mathbf{n}\|=1} \sigma_{nn} < \sigma_r$$

Dimensionnement selon un critère de rupture par cisaillement – Résumé 3.2 page 90

$$\text{pas de plasticité selon le critère de Tresca si } \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \max_{\|\mathbf{n}\|=1} \|\boldsymbol{\tau}_\Sigma\| < \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\text{pas de plasticité selon le critère de von Mises si } \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_D^2)} < \sigma_0$$

$$\boldsymbol{\sigma}_D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} \mathbb{I}$$

4. Comportement des matériaux

Les chapitres précédents nous ont permis de définir séparément les déformations et les contraintes au sein d'un domaine matériel donné. Toutefois, on perçoit bien que, à géométrie et chargement fixés, deux corps constitués de matériaux différents vont présenter des déformations différentes *a priori*. Il est ainsi nécessaire d'établir des relations mathématiques entre les tenseurs des déformations et des contraintes afin de pouvoir résoudre un problème de mécanique dans son intégralité.

POURQUOI ÉTUDIER LE COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX ?

4.1 Comportement mécanique des solides déformables

On récapitule ici les acquis des chapitres précédents, qui vont nous permettre de résoudre un problème complet. On se limite au cadre de l'hypothèse des petites déformations, qui nous autorise à confondre les configurations initiale et actuelle : on notera alors $\mathbf{x}$ la variable spatiale.

4.1.1 Bilan des inconnues et des équations du problème

Résoudre un problème de mécanique des milieux continus, c'est être capable de déterminer, en chaque point $\mathbf{x}$ d'un domaine matériel Ω , et à tout instant t :

- le champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, soit trois fonctions scalaires de l'espace et du temps ;
- le champ des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ (représenté par le tenseur des petites déformations du fait du cadre HPP), soit, du fait de sa symétrie, six fonctions scalaires de l'espace et du temps ;
- le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, soit, du fait de sa symétrie, six fonctions scalaires de l'espace et du temps.

En tout, c'est donc quinze fonctions scalaires de l'espace et du temps qu'il faut déterminer pour résoudre le problème considéré.

Pour cela, on dispose actuellement de plusieurs équations aux dérivées partielles, valables en tout point de l'intérieur du domaine, et à tout instant :

- une équation reliant déplacement et déformations :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T \right)$$

soit, après projection dans une base, six équations scalaires aux dérivées partielles ;

- une équation d'équilibre local :

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$$

où ρ et $\mathbf{a}$ peuvent s'exprimer en fonction du déplacement (les détails précis seront rappelés dans le paragraphe 5.1.1) ; on obtient alors trois équations scalaires aux dérivées partielles.

On dispose ainsi de neuf équations scalaires, en tout point du domaine et à chaque instant, pour lesquelles on peut écrire autant de conditions aux limites que nécessaire :

- des composantes connues du déplacement en certains points de la frontière du domaine ;
- des composantes connues du vecteur contrainte en d'autres points de la frontière du domaine ;
- des conditions initiales en déplacement et en vitesse en tout point de l'intérieur du domaine.

De ce bilan, on déduit qu'il manque six équations scalaires en chaque point du domaine et à tout instant. Il est assez instinctif de supposer que ces relations manquantes sont à chercher entre les contraintes et les déformations, que nous avons étudiées séparément pour l'instant. En effet, à géométrie et chargements fixés, il est logique d'anticiper des déformations différentes suivant le matériau choisi pour la pièce ou la structure réalisée, au travers de propriétés de rigidité notamment, que nous allons définir plus loin dans ce chapitre.

4.1.2 Diversité des comportements

Les relations de comportement que l'on cherche à établir entre contraintes et déformations peuvent être de natures très différentes suivant les matériaux étudiés, et les sollicitations qu'ils subissent (mécanique, thermique, hygrométrique, chimique, ...). Idéalement, ces relations pourraient se déterminer à l'aide de la description des phénomènes locaux aux très petites échelles au sein de la matière, en utilisant les résultats de la physique statistique ou de la dynamique moléculaire par exemple. En pratique, même si les avancées dans ces domaines sont conséquentes, il est encore difficile d'en utiliser les résultats directement pour déterminer la forme des relations de comportement (ou tout simplement les paramètres qui les régissent) à l'échelle macroscopique, qui est l'échelle considérée dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

Ainsi, comme au chapitre précédent, les essais de caractérisation tels que l'essai de traction sont privilégiés pour déterminer des lois de type phénoménologique (la figure 4.1 permet à ce sujet de constater la diversité des courbes de traction que l'on peut obtenir pour différents matériaux). L'hypothèse de travail consiste à admettre que les propriétés mécaniques qui sont mesurées sur un échantillon de matière sont représentatives des propriétés dans tout le milieu. Il se cache alors derrière cette hypothèse, au minimum, une propriété d'homogénéité macroscopique. Ainsi, il faut considérer autant de relations de comportement qu'il y a de milieux distincts sur le plan macroscopique. Par exemple, si une pièce est obtenue par le soudage, ou le collage, de deux parties fabriquées dans des aciers différents, il faut connaître les propriétés respectives de ces deux constituants (et éventuellement de la soudure ou de la colle si l'on estime que l'assemblage n'est pas parfait) pour pouvoir poser les équations dans chacun de ces milieux.

En outre, il est également fondamental de disposer d'une certaine homogénéité à l'échelle microscopique : des zones différentes doivent avoir des comportement analogues dès lors que l'on considère un volume de taille suffisante (mais très inférieure bien sûr à la taille de l'éprouvette étudiée). Cette hypothèse d'avoir à disposition ce que l'on appelle un volume élémentaire représentatif (ou VER) est ce qui permet de considérer le béton comme un matériau homogène à l'échelle macroscopique malgré ses différents constituants à l'échelle microscopique, ou encore

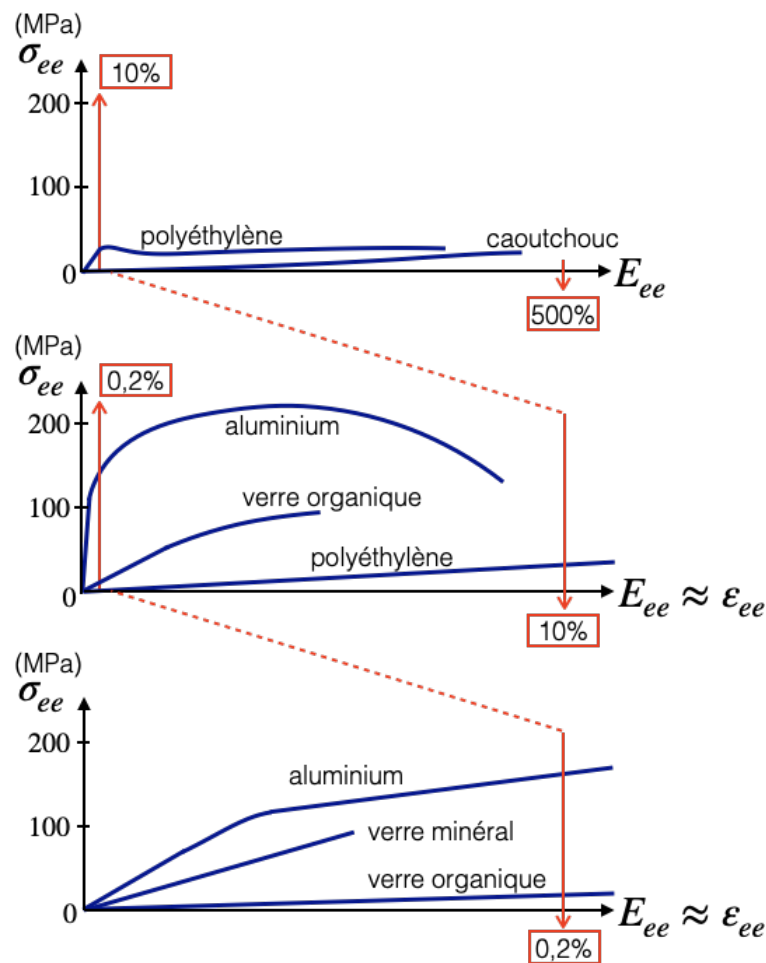


FIGURE 4.1 – Courbes de traction typiques pour différents matériaux.

l'acier comme un matériau isotrope malgré les orientations multiples des cristaux (ou « grains ») qui le composent.

Ainsi, les différents essais de caractérisation que l'on peut réaliser permettent de mettre en évidence une multiplicité de grandes classes de comportements, dont voici quelques éléments succincts. Plus de précisions pourront être trouvées dans [Fra05 ; Lem+09 ; RHB07].

Élasticité (linéaire et non linéaire) – Pour un chargement faible, le comportement est souvent linéaire et réversible : lors de l'essai de traction, on peut effectuer plusieurs mises en charge, puis décharges, de l'éprouvette en revenant à chaque fois à l'origine sur la courbe de traction, comme on l'a déjà évoqué dans le paragraphe 3.1.1. Suivant les matériaux, le comportement élastique peut subsister lors de l'augmentation des déformations, mais avec une non linéarité significative, comme dans le cas des élastomères par exemple, ainsi que le montre la figure 4.3 (à gauche).

Limite d'élasticité et déformations irréversibles – Pour les matériaux ductiles, au-delà d'un certain seuil appelé limite d'élasticité, des déformations irréversibles apparaissent, ce qui signifie qu'après décharge et retour à une sollicitation nulle, la courbe de traction ne revient pas à l'origine. Dans le cas des matériaux métalliques, les mécanismes microscopiques liés à la plasticité ont été rapidement évoqués dans le paragraphe 3.1.1 ; pour les polymères, les déformations irréversibles sont surtout dues aux glissements des macrochaînes moléculaires

entre elles. Lorsque la limite d'élasticité n'évolue pas en fonction des déformations plastiques, le matériau est dit « parfaitement plastique » ; si elle évolue (comme sur la figure 4.2), on parle alors d'« écrouissage », qui peut être isotrope ou cinématique suivant la nature de l'évolution du domaine élastique.

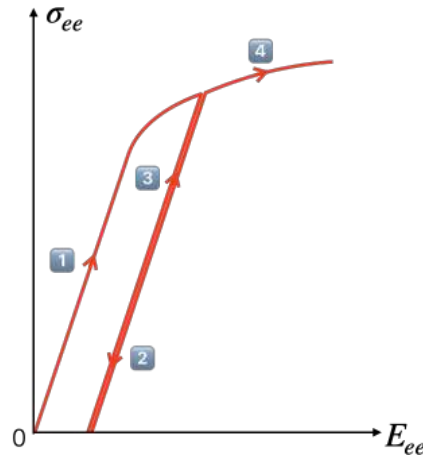


FIGURE 4.2 – Matériau présentant de l'écrouissage.

Comportement dépendant du temps – Pour la plupart des matériaux, on peut constater une évolution plus ou moins importante de l'état de contrainte ou de déformation alors que les sollicitations extérieures n'évoluent plus avec le temps ; on parle alors de « fluage », quand le matériau se déforme progressivement sous chargement constant, ou de « relaxation », quand les contraintes diminuent alors que l'on maintient immobiles les têtes de l'éprouvette. Ces phénomènes peuvent être liés à de la viscoélasticité, où les caractéristiques de rigidité du matériau dépendent des vitesses de sollicitation ou de déformation appliquées, comme dans le cas des polymères dans leur zone de transition vitreuse par exemple. La figure 4.3 (à droite) en montre le comportement dans le cas d'essais de fluage dits *isochrones*, pour lesquels on observe, pour différents niveaux constants de contrainte appliquée, la valeur de la déformation à différents instants t_k .

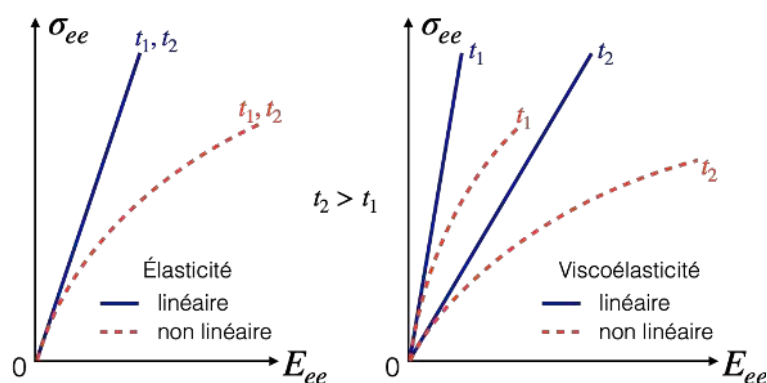


FIGURE 4.3 – Comportements élastique et viscoélastique pour des essais isochrones ($t_2 > t_1$).

Endommagement – Les propriétés mécaniques peuvent être modifiées par l'évolution de l'« état » de la structure : en effet, comme on l'a vu dans le paragraphe 3.1.2, les matériaux se dégradent au cours du temps sous l'effet des sollicitations qu'ils subissent ; les défauts qu'ils comprennent (vides, inclusions, microfissures) s'amplifient du fait des concentrations de contraintes sous-jacentes, et affaiblissent en particulier la rigidité globale. La figure 4.4

montre l'évolution typique du comportement en compression du béton pour plusieurs mises en charge et décharges successives.

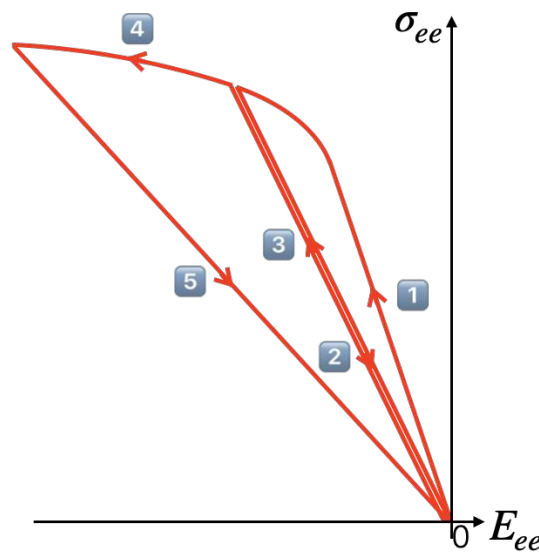


FIGURE 4.4 – Comportement élastique avec endommagement du béton (en compression).

Chargements cycliques et fatigue – Lors de chargements périodiques, le matériau peut, selon les cas, voir ses déformations se stabiliser, ou, au contraire, s'amplifier jusqu'à la rupture : on distingue alors l'« adaptation », l'« accommodation », ou le « rochet », selon que, sur la courbe contrainte-déformation, il y a stabilisation selon un segment, une boucle, ou pas de stabilisation (les différents cas sont représentés sur la figure 4.5). Dans le cas de la fatigue à grand nombre de cycles, des déformations permanentes ou de l'endommagement négligeables au début peuvent se développer et conduire à la ruine du matériau, même pour des niveaux de sollicitations très inférieures à la limite d'élasticité.

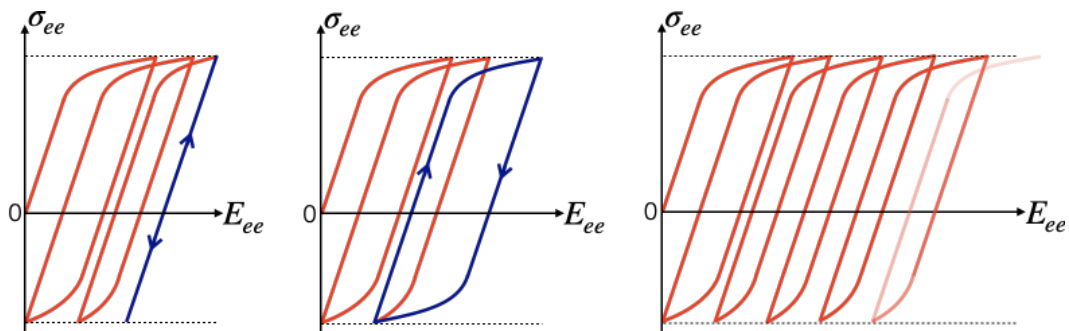


FIGURE 4.5 – Comportements en fatigue : adaptation, accommodation et rochet (de gauche à droite).

4.1.3 Comportement élastique linéaire dans le cadre HPP

Le paragraphe précédent a permis d'apprécier l'extrême diversité des comportements que l'on peut observer. Nous allons ici nous limiter au comportement le plus élémentaire à décrire, et qui est présent chez tous les matériaux, à savoir le comportement élastique linéaire. L'élasticité se caractérise par un comportement réversible, ce qui revient à dire que la relation à définir entre contraintes et déformations est instantanée : peu importe l'historique des chargements précédents,

ceux-ci n'ont (idéalement) aucune influence sur le comportement décrit. En outre, les courbes de traction visibles sur la figure 4.1 permettent de constater systématiquement une relation de proportionnalité entre contrainte et déformation uniaxiales, au moins au début de l'essai.

Bien sûr, ceci ne permet pas de conclure que les tenseurs des contraintes et des petites déformations sont proportionnels : en effet, on a vu dans le paragraphe 3.1.1 que les dimensions transverses de l'éprouvette diminuaient quand cette dernière s'allongeait ; pour un essai de traction selon l'axe $\mathbf{i}_3$, quand on regarde les composantes des deux tenseurs dans une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, on a donc $\varepsilon_{11} \neq 0$ et $\varepsilon_{22} \neq 0$, alors que les composantes correspondantes du tenseur des contraintes sont nulles ($\sigma_{11} = 0 = \sigma_{22}$), vu que la seule composante non nulle de $\boldsymbol{\sigma}$ est σ_{33} .

Représentation mathématique de la relation de comportement

Mathématiquement, on a vu dans les chapitres précédents que les tenseurs d'ordre deux représentent des applications linéaires de l'espace des vecteurs dans lui-même : ainsi, le tenseur des contraintes, défini dans le paragraphe 2.2.2, permet de traduire le fait que le vecteur contrainte dépend linéairement de la normale à la facette considérée.

Pour obtenir une dépendance linéaire du tenseur des contraintes vis-à-vis du tenseur des petites déformations (ou vice versa), on peut donc s'intéresser aux applications linéaires de l'espace des tenseurs d'ordre deux dans lui-même : ces applications sont des tenseurs d'ordre quatre, dont on donne quelques éléments théoriques dans l'annexe A.3. On définit alors le tenseur d'ordre quatre suivant.

Tenseur d'élasticité. On définit le tenseur d'élasticité comme le tenseur d'ordre quatre $\mathbf{C}$ reliant le tenseur des petites déformations au tenseur des contraintes, en tout point du domaine Ω et à chaque instant :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t$$

Ceci est équivalent à écrire en termes de composantes dans une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ que :

$$\sigma_{mn} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 C_{mnpq} \varepsilon_{pq}, \quad 1 \leq m, n \leq 3$$

Il est donc possible d'interpréter le tenseur d'élasticité comme un tableau à quatre dimensions, dont les composantes vérifient :

$$C_{mnpq} = \text{tr}((\mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n)^T \mathbf{C} (\mathbf{i}_p \otimes \mathbf{i}_q)), \quad 1 \leq m, n, p, q \leq 3$$

Compte tenu de la symétrie des tenseurs des contraintes et des petites déformations, le nombre de composantes indépendantes du tenseur d'élasticité se réduit, dans un premier temps, à 36, vu que :

$$C_{mnpq} = C_{nmpq}, \quad \text{et} \quad C_{mnpq} = C_{mqnp}, \quad 1 \leq m, n, p, q \leq 3$$

En outre, on peut montrer par des considérations thermodynamiques que le tenseur d'élasticité peut s'obtenir comme la dérivée seconde d'une énergie interne élastique, ce qui implique une dernière condition de symétrie, à savoir :

$$C_{mnpq} = C_{pqmn}, \quad 1 \leq m, n, p, q \leq 3$$

Par conséquent, le tenseur d'élasticité présente donc *a priori* 21 composantes indépendantes, qui, si elles sont quelconques, sont donc à même de traduire le comportement élastique linéaire d'un matériau anisotrope quelconque. Bien sûr, ce nombre peut être réduit dès que l'on est capable de mettre en évidence certaines symétries matérielles pour le comportement, ce qui implique des

relations supplémentaires entre les différentes composantes du tenseur d'élasticité, comme on le verra dans le paragraphe 4.2.



Dans le cas général d'un matériau hétérogène, ces composantes peuvent dépendre du point considéré (si le matériau est hétérogène), mais aussi d'autres facteurs environnementaux, tels que la température ou l'hygrométrie par exemple.



Il est bien sûr possible d'inverser la relation de comportement, en exprimant le tenseur des petites déformations en fonction du tenseur des contraintes comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$$

où $\mathbf{S}$ est le tenseur de souplesse, tel que $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$.

Notation de Voigt

Il peut être commode, afin de simplifier les calculs quand on raisonne sur les composantes des différents tenseurs, d'utiliser la notation de Voigt, dont le principe est de réorganiser les indices des composantes afin d'obtenir une mise en œuvre plus aisée. Pour cela, on « contracte » chaque paire d'indices en un seul, de façon à transformer les tenseurs d'ordre deux symétriques en vecteurs à six composantes, et les tenseurs d'ordre quatre symétriques en matrices 6×6 , comme exposé dans ce qui suit.

Notation de Voigt en élasticité linéaire. La relation de comportement $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ devient, en utilisant la notation de Voigt et une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 = \sigma_{11} \\ \tilde{\sigma}_2 = \sigma_{22} \\ \tilde{\sigma}_3 = \sigma_{33} \\ \tilde{\sigma}_4 = \sigma_{23} \\ \tilde{\sigma}_5 = \sigma_{13} \\ \tilde{\sigma}_6 = \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{16} \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{26} \\ \tilde{C}_{13} & \tilde{C}_{23} & \tilde{C}_{33} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{35} & \tilde{C}_{36} \\ \tilde{C}_{14} & \tilde{C}_{24} & \tilde{C}_{34} & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{46} \\ \tilde{C}_{15} & \tilde{C}_{25} & \tilde{C}_{35} & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{55} & \tilde{C}_{56} \\ \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{26} & \tilde{C}_{36} & \tilde{C}_{46} & \tilde{C}_{56} & \tilde{C}_{66} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_{11} \\ \tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_{22} \\ \tilde{\varepsilon}_3 = \varepsilon_{33} \\ \tilde{\varepsilon}_4 = 2\varepsilon_{23} \\ \tilde{\varepsilon}_5 = 2\varepsilon_{13} \\ \tilde{\varepsilon}_6 = 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$$

ce qui revient à dire que, pour les différents tenseurs, on a contracté les indices par paires selon la convention :

$$nn \rightarrow n, \text{ et } mn \rightarrow 9 - m - n, m \neq n$$

en prenant garde d'appliquer un coefficient multiplicateur de 2 sur les trois dernières composantes de $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, qui est nécessaire pour pouvoir écrire que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

En outre, on a tenu compte de la dernière hypothèse de symétrie du tenseur d'élasticité ($C_{mnpq} = C_{pqmn}$, $1 \leq m, n, p, q \leq 3$), qui se traduit tout simplement par une matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ qui est symétrique ($\tilde{C}_{ij} = \tilde{C}_{ji}$, $1 \leq i, j \leq 6$).



Grâce au facteur 2 introduit, on peut directement écrire ce qui représente une densité volumique d'énergie de déformation élastique comme :

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon}) = \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$$

au sens du produit scalaire entre deux vecteurs (à six composantes ici).

4.2 Comportement élastique linéaire isotrope dans le cadre HPP

Nous décrivons ici le modèle de comportement le plus employé en mécanique des solides déformables dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, qui met en jeu un nombre de paramètres caractéristiques minimal.

4.2.1 Hypothèse d'isotropie

Comme on l'a déjà évoqué plus haut, si pratiquement tous les matériaux sont par essence anisotropes, tout du moins localement, un grand nombre se comporte de façon isotrope à l'échelle macroscopique : par exemple, les matériaux polycristallins tels que les métaux sont formés d'un grand nombre de grains anisotropes, mais le caractère aléatoire de la répartition des orientations cristallographiques des différents grains fait que ces matériaux présentent à l'échelle macroscopique une isotropie globale, de nature statistique.

D'un point de vue pratique, dire qu'un matériau présente un comportement isotrope en un point, c'est annoncer que la relation entre les tenseurs des contraintes et des déformations en ce point sera la même quel que soit le changement d'orientation préalable que l'on aura pu faire subir au domaine matériel. Mathématiquement, ce changement d'orientation revient à appliquer une matrice de rotation $\mathbb{R}_0$ (comme définie dans l'annexe A.2.6) à la configuration initiale Ω_0 , ce qui fait qu'un point $\mathbf{q}$ au voisinage de $\mathbf{p}$ est représenté dans la nouvelle configuration initiale Ω_0^* par :

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{p} + \mathbb{R}_0(\mathbf{q} - \mathbf{p})$$

On considère alors la même transformation du voisinage de $\mathbf{p}$ dans les deux choix de configurations initiales, ce qui signifie que l'on applique, vis-à-vis de ces dernières, des déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{q})$ et $\mathbf{u}^*(\mathbf{q}^*)$ qui vérifient :

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{q}^*) = \mathbb{R}_0 \mathbf{u}(\mathbf{q})$$

ou encore, en considérant les tenseurs gradients du déplacement, exprimés au point $\mathbf{p}$:

$$\mathbb{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{u}^* = \mathbb{R}_0(\mathbb{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{u})(\mathbb{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{p}) = \mathbb{R}_0(\mathbb{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{u}) \mathbb{R}_0^T$$

vu que la matrice de rotation vérifie $\mathbb{R}_0^{-1} = \mathbb{R}_0^T$. On en déduit que le tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, décrit par un observateur lié à la configuration Ω_0^* , s'exprime comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbb{R}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbb{R}_0^T$$

L'hypothèse d'isotropie impliquant que la relation de comportement doit rester inchangée quelle que soit la configuration de référence considérée ($\mathbf{C}^* = \mathbf{C}$), on doit avoir que :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^*$$

où $\boldsymbol{\sigma}^*$ est le tenseur des contraintes dans la configuration déformée, et décrit par un observateur lié à la configuration de référence Ω_0^* . Ce tenseur doit alors être exprimé en fonction du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$ décrit par un observateur lié à Ω_0 . On invoque pour cela le « principe d'indifférence matérielle », qui stipule que le vecteur contrainte ne doit pas dépendre de la base utilisée pour son expression, ou, de façon équivalente, que le vecteur contrainte doit tourner si l'on garde la base d'expression inchangée, mais que l'on tourne la configuration déformée. Dans ce cadre, si l'observateur lié à Ω_0 voit en $\mathbf{x}$, et pour une normale $\mathbf{n}$ à la facette de coupure, un vecteur contrainte $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$, celui lié à Ω_0^* voit au même point un vecteur contrainte $\mathbf{T}^* = \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbb{R}_0 \mathbf{n})$ tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbb{R}_0 \mathbf{n}) = \mathbb{R}_0(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})$$

ce qui permet d'établir que :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{R}_0 \boldsymbol{\sigma} \mathbb{R}_0^T$$

Par conséquent, l'hypothèse d'isotropie nécessite finalement de vérifier que :

$$\mathbb{R}_0(\mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbb{R}_0^T = \mathbb{R}_0 \boldsymbol{\sigma} \mathbb{R}_0^T = \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{C}(\mathbb{R}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbb{R}_0^T)$$

quels que soient le tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la matrice de rotation $\mathbb{R}_0$. On utilise alors le théorème suivant.

Théorème de représentation de Rivlin-Ericksen (cas linéaire). Un tenseur $\mathbf{T}$ d'ordre quatre, agissant de l'espace des tenseurs d'ordre deux symétriques dans lui-même, est dit isotrope si et seulement s'il vérifie :

$$\mathbb{R}(\mathbf{T}\mathbb{A})\mathbb{R}^T = \mathbf{T}(\mathbb{R}\mathbb{A}\mathbb{R}^T), \forall \mathbb{A} \text{ symétrique}, \forall \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbb{R}\mathbb{R}^T = \mathbb{I}$$

Alors il existe deux scalaires α et β tels que l'on peut exprimer le tenseur $\mathbf{T}$ comme :

$$\mathbf{T}\mathbb{A} = \alpha\mathbb{A} + \beta(\text{tr}\mathbb{A})\mathbb{I}, \forall \mathbb{A} \text{ symétrique}$$

La démonstration de ce résultat est détaillée dans l'annexe A.3.2.

L'application de ce résultat est directe dans le cas du tenseur d'élasticité, pour aboutir à la loi suivante.

Loi de Hooke. L'hypothèse d'isotropie permet d'écrire la relation de comportement élastique linéaire comme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x})(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t))\mathbb{I} + 2\mu(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$$

où $\lambda(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x})$ sont appelés les paramètres de Lamé, associés au matériau isotrope considéré, et qui s'expriment généralement en GPa. Si, de plus, le matériau est homogène, ces deux paramètres λ et μ sont constants, ce qui signifie qu'il suffit donc de deux scalaires seulement pour décrire le comportement élastique linéaire du matériau.

Pour inverser cette relation, on commence par exprimer la trace du tenseur des contraintes en fonction de celle du tenseur des petites déformations :

$$\text{tr}\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})(\text{tr}\mathbb{I}) + 2\mu\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = (3\lambda + 2\mu)\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}$$

ce qui permet d'écrire que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\lambda(\mathbf{x})}{2\mu(\mathbf{x})(3\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}))}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t))\mathbb{I} + \frac{1}{2\mu(\mathbf{x})}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$$

dans le cas général d'un matériau hétérogène.

R La forme de la relation de comportement élastique linéaire isotrope permet d'établir que déformations et contraintes principales partagent les mêmes directions associées ; en effet, si l'on se place, en un point $\mathbf{x}$ donné, dans la base $(\boldsymbol{\phi}_1^\sigma, \boldsymbol{\phi}_2^\sigma, \boldsymbol{\phi}_3^\sigma)$ des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, on trouve que le tenseur des petites déformations s'écrit, à l'aide des mêmes vecteurs de base, comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\left(\sum_{k=1}^3 \sigma_k\right)\mathbb{I} + \frac{1}{2\mu}\sum_{k=1}^3 \sigma_k \boldsymbol{\phi}_k^\sigma \otimes \boldsymbol{\phi}_k^\sigma$$

soit finalement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_k \boldsymbol{\phi}_k^\sigma \otimes \boldsymbol{\phi}_k^\sigma, \text{ avec } \varepsilon_k = \frac{(\lambda + \mu)\sigma_k}{\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sum_{l \neq k} \sigma_l$$

Ces déformations sont principales vu qu'il n'y a aucun terme de distorsion dans la base $(\boldsymbol{\phi}_1^\sigma, \boldsymbol{\phi}_2^\sigma, \boldsymbol{\phi}_3^\sigma)$.

4.2.2 Lien avec l'essai de traction

Si le paragraphe précédent a permis de mettre en avant les deux paramètres de Lamé dans l'expression de la relation de comportement isotrope, un second jeu de paramètres est traditionnel-

lement proposé, et tire son origine de l'analyse de l'essai de traction, qui permet de construire de façon « pratique » la relation de comportement.

Construction pratique de la relation de comportement

Si l'on considère un essai de traction selon la direction $\mathbf{e}$, et le tenseur des contraintes associé ($\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ee} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$ avec $\sigma_{ee} > 0$), on peut alors déterminer le tenseur des petites déformations comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\lambda \sigma_{ee}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \mathbb{I} + \frac{\sigma_{ee}}{2\mu} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$$

dans le cas d'un matériau homogène, c'est-à-dire de paramètres de Lamé constants. Si l'on définit une base ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 = \mathbf{e}$), on trouve finalement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\lambda \sigma_{ee}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2) + \frac{(\lambda + \mu) \sigma_{ee}}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$$

Comme attendu, on trouve que la déformation longitudinale ε_{33} est proportionnelle à la contrainte longitudinale σ_{ee} , mais aussi que la section se rétrécit, compte tenu des déformations transverses ε_{11} et ε_{22} . Vis-à-vis de ces observations, on définit alors les deux paramètres suivants.

Module de Young et coefficient de Poisson. En se basant sur l'analyse d'un essai de traction d'un matériau dans son domaine élastique, on définit classiquement :

- le module de Young, noté E , comme le coefficient de proportionnalité entre les contrainte et déformation longitudinales :

$$E = \frac{\sigma_{33}}{\varepsilon_{33}} = \frac{\sigma_{ee}}{\varepsilon_{33}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}$$

- le coefficient de Poisson, noté ν , comme l'opposé du coefficient de proportionnalité entre les déformations transverse et longitudinale :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Compte tenu de ces définitions, on constate aisément que le module de Young est homogène à une contrainte (et s'exprime usuellement en GPa), tandis que le coefficient de Poisson est sans dimension.

Afin de construire maintenant la relation de comportement à partir de ces définitions, il suffit de se placer dans la base des directions associées aux contraintes principales, et de considérer les déformations selon ces mêmes directions. Ainsi, la déformation ε_1 selon la première direction principale s'obtient en considérant la « superposition » de trois essais de traction, chacun selon une direction différente, et d'intensité la contrainte principale associée, comme représenté sur la figure 4.6 ; pour cette direction, la déformation ε_1 correspond à une déformation longitudinale pour le premier essai, et une déformation transverse pour les deux autres, ce qui implique, compte tenu des définitions de E et ν , que :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E}$$

En effet, comme on l'évoquera de façon plus précise dans le paragraphe 5.3.1, l'ensemble des équations des problèmes que l'on traite sont linéaires, et il est ainsi possible de décomposer le problème en une somme de problèmes plus simples, dont les solutions sont ajoutées pour donner la solution finale du problème considéré.

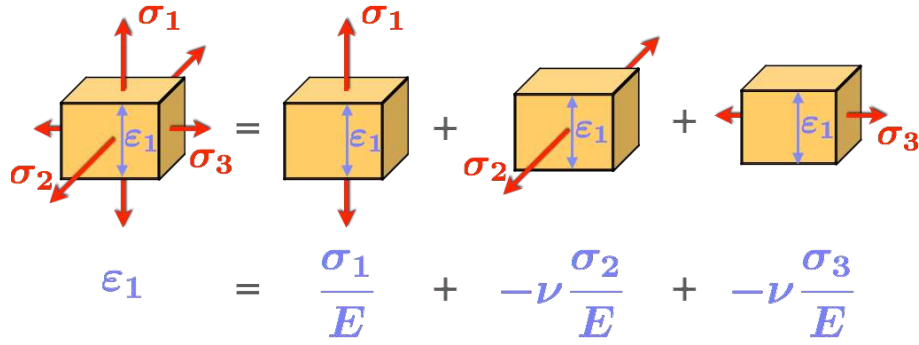


FIGURE 4.6 – Construction de la relation de comportement par superposition de trois essais de traction.

En procédant de même selon les deux autres directions principales (sachant qu'il n'y a pas de distorsion), on construit ainsi la relation de comportement de la façon suivante ;

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \right) \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \left(\frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \right) \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \left(\frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \right) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$$

soit, en faisant intervenir explicitement la trace du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = & \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right) \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right) \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 \\ & + \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \end{aligned}$$

ou, sous forme condensée :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbb{I}$$

Ceci nous permet également de donner un deuxième jeu de relations entre paramètres de Lamé et module de Young – coefficient de Poisson, à savoir :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Valeurs usuelles des paramètres

La signification physique que l'on peut donner au module de Young et au coefficient de Poisson permet de donner des bornes, elles aussi physiques, à ces deux paramètres. Tout d'abord, compte tenu du fait « naturel » qu'une éprouvette s'allonge quand on exerce un effort de traction sur elle, on peut affirmer que le module de Young est toujours strictement positif :

$$E > 0$$

Par ailleurs, dans un essai de cisaillement, la distorsion se fait dans le sens du cisaillement ; comme ces deux quantités sont reliées par le paramètre de Lamé μ (que l'on appelle par conséquent module de cisaillement), celui-ci est également strictement positif, donc :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0, \text{ soit : } \nu > -1$$

Enfin, si l'on considère le cas d'un essai de compression isotrope, où l'on impose $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbb{I}$ avec une pression $p > 0$ (obtenue par exemple par l'action d'un fluide), on peut écrire que le tenseur des petites déformations associé vaut :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} (-p\mathbb{I}) - \frac{\nu}{E} (-3p)\mathbb{I} = -\frac{1-2\nu}{E} p\mathbb{I}$$

Ce tenseur est homogène, et on déduit alors la variation de volume de l'échantillon en utilisant l'expression développée dans le paragraphe 1.4.1 pour l'hypothèse des petites perturbations, qui donne comme variation locale :

$$\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{3(1-2\nu)}{E} p$$

qui est donc uniforme. Comme, en pratique, tous les matériaux soumis à une compression isotrope voient leur volume diminuer, on peut donc en déduire que :

$$\frac{3(1-2\nu)}{E} > 0, \text{ soit } \nu < \frac{1}{2}$$

Par conséquent, on conclut que le coefficient de Poisson vérifie nécessairement :

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}$$

Le tableau 4.1 donne quelques ordres de grandeur des modules de Young et des coefficients de Poisson de plusieurs matériaux d'usage courant, dont certains à différentes températures.

Matériaux	Module de Young (GPa)	Coefficient de Poisson
caoutchouc	10^{-3} – 10^{-1}	0,4999
plexiglas	2,4–2,9	0,40–0,43
résine epoxy	3–3,5	0,40
béton	20–50	0,10–0,20
verre	50–90	0,18–0,30
aluminium	68–69	0,33–0,35
alliages d'aluminium	72–75	0,32
" (à 200°C)	66	0,325
" (à 500°C)	55	0,35
laiton	100–130	0,37
bronze	125–130	0,34
" (à 180°C)	120	0,34
fontes	80–170	0,21–0,29
alliages de titane	115–200	0,34
" (à 200°C)	103	0,34
" (à 315°C)	95	0,34
aciers inox	195–205	0,30–0,31
" (à 200°C)	170	0,30
" (à 700°C)	131	0,30
aciers de construction	210–220	0,27–0,30
" (à 200°C)	205	0,30
" (à 600°C)	170	0,315
carbure de silicium	450	0,17
diamant	1050–1200	0,10

TABLEAU 4.1 – Valeurs typiques pour divers matériaux du module de Young et du coefficient de Poisson (à température ambiante, sauf mention contraire).

Résumé 4.1 — Comportement élastique linéaire isotrope (loi de Hooke). La relation de comportement qui relie les tenseurs des contraintes et des petites déformations s'écrit, dans le cas d'un matériau élastique linéaire isotrope, comme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x})(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t))\mathbb{I} + 2\mu(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t$$

quand on l'exprime en rigidité, où $\lambda(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x})$ sont les paramètres de Lamé, caractéristiques du matériau considéré, ou encore :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{1 + \nu(\mathbf{x})}{E(\mathbf{x})}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \frac{\nu(\mathbf{x})}{E(\mathbf{x})}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t))\mathbb{I}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t$$

quand on l'exprime en souplesse, où $E(\mathbf{x})$ et $\nu(\mathbf{x})$ sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau considéré.

Dans le cas où le matériau est homogène, les différents coefficients deviennent des constantes caractéristiques de ce dernier. En outre, les couples de coefficients matériau vérifient les relations suivantes :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

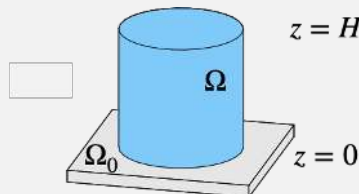


Dans le cas de l'essai de compression isotrope décrit plus haut, on appelle module d'incompressibilité κ l'opposé du rapport entre la pression appliquée et la variation de volume obtenue, soit :

$$\kappa = -\frac{p}{\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Le cas limite $\nu = 1/2$ correspond à des matériaux parfaitement incompressibles, pour lesquels le module de compressibilité est donc infini. Si, rigoureusement, il n'existe aucun matériau de ce type, les élastomères sont ce qui se rapproche le plus de cette situation limite ; citons par exemple le caoutchouc naturel, dont le coefficient de Poisson vaut 0,4999.

■ **Exemple 4.1 — Barreau cylindrique soumis à une pression.** On considère un barreau cylindrique Ω d'axe vertical $\mathbf{i}_z$, de section circulaire de rayon R , et de hauteur H . On suppose en outre que le barreau est en équilibre statique sous l'action d'une pression uniforme exercée sur sa face supérieure, et la réaction du support. On considère enfin que le matériau est homogène et isotrope, et reste, dans le cadre HPP, dans son domaine d'élasticité linéaire, caractérisé par un module de Young E et un coefficient de Poisson ν .



L'inventaire des équations et conditions aux limites à prendre en compte est le suivant ; en introduisant la base cylindrique $(\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_z)$ associée au cylindre (avec $z = 0$ correspondant à la face inférieure du barreau), on cherche à déterminer un champ de déplacement $\mathbf{u}$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ vérifiant :

— l'équation d'équilibre local en tout point du domaine :

$$\text{div}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

- la condition de contact avec le support en termes de déplacement (contact glissant) :

$$\langle \mathbf{u}_{(z=0)}, \mathbf{i}_z \rangle = 0$$

- la condition de contact avec le support en termes de forces locales (qui sont normales à la frontière en vertu du contact sans frottement) :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{(z=0)}(-\mathbf{i}_z), \mathbf{i}_r(\theta) \rangle = 0 = \langle \boldsymbol{\sigma}_{(z=0)}(-\mathbf{i}_z), \mathbf{i}_\theta(\theta) \rangle$$

- la condition de bord libre sur la surface latérale du barreau :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(r=R)} \mathbf{i}_r = \mathbf{0}$$

- la condition de pression (uniforme) p_0 appliquée sur la surface supérieure du barreau :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(z=H)} \mathbf{i}_z = -p_0 \mathbf{i}_z$$

- la relation de comportement élastique linéaire, homogène et isotrope, du matériau constitutif en tout point du barreau, par exemple exprimée en souplesse :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbb{I}$$

où le tenseur des petites déformations est défini en tout point comme la partie symétrique du tenseur gradient du déplacement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T)$$

On constate alors qu'un champ de contraintes uniaxial et uniforme $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0 \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z$ vérifie les équations liées aux efforts :

$$\text{div}_{\mathbf{x}}(\sigma_0 \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z) = \mathbf{0}, (\sigma_0 \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z) \mathbf{i}_r = \mathbf{0}, \text{ et } (\sigma_0 \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z) \mathbf{i}_z = -p_0 \mathbf{i}_z$$

à condition d'avoir $\sigma_0 = -p_0$.

Il reste désormais à vérifier qu'il est possible d'associer à cet état de contraintes un champ de déplacement respectant la condition en $z = 0$. Pour cela, la relation de comportement en souplesse nous permet d'établir que le tenseur des petites déformations s'écrit comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = -\frac{1+\nu}{E} p_0 \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z + \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbb{I}$$

avec $\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = -p_0$, d'où, finalement :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = -\frac{p_0}{E} \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z + \frac{\nu p_0}{E} (\mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_r(\theta) + \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(\theta))$$

qui traduit un tassement vertical du barreau, associé à une dilatation radiale liée à l'effet de Poisson.

Compte tenu de l'axisymétrie du problème, on verra dans le paragraphe 5.3.2 que le champ de déplacement peut alors s'exprimer comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_r(r, z) \mathbf{i}_r(\theta) + u_z(r, z) \mathbf{i}_z$$

et doit donc vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \varepsilon_{rr} = \frac{\nu p_0}{E} \\ \frac{u_r}{r} &= \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\nu p_0}{E} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \varepsilon_{zz} = -\frac{p_0}{E} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} &= 2\varepsilon_{rz} = 0 \end{aligned}$$

La deuxième équation permet de déterminer directement que le déplacement radial u_r n'est qu'une fonction de r seulement :

$$u_r(r, z) = \frac{\nu p_0}{E} r = u_r(r)$$

ce qui implique, avec la quatrième équation, que le déplacement vertical u_z n'est qu'une fonction de z seulement. La troisième équation permet enfin d'établir que :

$$u_z(z) = -\frac{p_0}{E} z$$

compte tenu de la condition de contact avec le support : $u_z(0) = 0$. Le champ de déplacement traduit donc le tassement vertical et l'expansion du barreau sous l'action de la pression p_0 :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{p_0}{E} z \mathbf{i}_z + \frac{\nu p_0}{E} r \mathbf{i}_r(\theta)$$



Il est important de pouvoir vérifier l'ensemble des équations et conditions aux limites pour pouvoir affirmer que le couple champ de déplacement – champ de contraintes soit bien la solution du problème. En particulier, il est fondamental d'être capable de déterminer un champ de déplacement dont la partie symétrique du gradient correspond au tenseur des petites déformations associé au tenseur des contraintes par l'intermédiaire de la relation de comportement.

Ainsi, le champ de contraintes déterminé dans le cas de l'exemple 2.9 (page 64), qui concerne une barre soumise à l'action de la pesanteur, n'est pas rigoureusement la solution du problème, car il n'est pas possible de lui associer un champ de déplacement vérifiant l'ensemble des équations cinématiques.

4.3 Comportement thermoélastique dans le cadre HPP

On a vu dans ce qui précède comment décrire le comportement mécanique d'un matériau dans son domaine élastique linéaire ; les paramètres qui le décrivent (en un point donné quand le matériau est hétérogène, de façon globale sinon) ne sont généralement pas des constantes intrinsèques, mais peuvent dépendre de facteurs liés à l'environnement, tels que la température par exemple. Ces derniers facteurs peuvent également avoir une influence directe sur la forme de la relation de comportement : l'exemple le plus frappant est la prise en compte des variations de température, que nous allons détailler dans ce qui suit.

4.3.1 Cadre de la thermoélasticité linéaire

Le principe est de prendre en compte dans la relation de comportement ce que l'on appelle la dilatation thermique. D'un point de vue thermodynamique, la température représente l'énergie cinétique moyenne des atomes dans la matière, et a ainsi une influence sur les liaisons interatomiques ; en effet, une augmentation de température tend à augmenter l'énergie des atomes, qui commencent à osciller autour de leurs positions d'équilibre respectives : l'amplitude de ces oscillations peut se visualiser sur la figure 4.7 où l'on vient ajouter l'énergie d'origine thermique à l'énergie du minimum de potentiel, qui marque la position d'équilibre de référence, de distance interatomique r_0 . Comme la courbe du potentiel n'est pas symétrique par rapport à ce minimum, l'oscillation se fait autour d'une nouvelle position d'équilibre qui est à plus grande distance ($r_1 > r_0$), et ceci d'autant plus que l'augmentation de température est importante. Ceci permet donc d'expliquer le phénomène de dilatation thermique qui devient visible à l'échelle macroscopique.

Pour tenir compte de ce phénomène, on peut postuler que le tenseur des petites déformations « totales » $\boldsymbol{\varepsilon}^t$ (qui est lié au champ de déplacement) se calcule comme la somme du tenseur des petites déformations élastiques (noté $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, et associé au tenseur des contraintes) et d'un tenseur des petites déformations thermiques $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$:

$$\frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T) = \boldsymbol{\varepsilon}^t = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^{th}$$

Tenseur des petites déformations thermiques. Pour la plupart des solides, on constate, pour une plage de températures donnée, que la dilatation thermique est proportionnelle à l'accroissement de température ; si, de plus, elle est la même selon toutes les directions, on peut

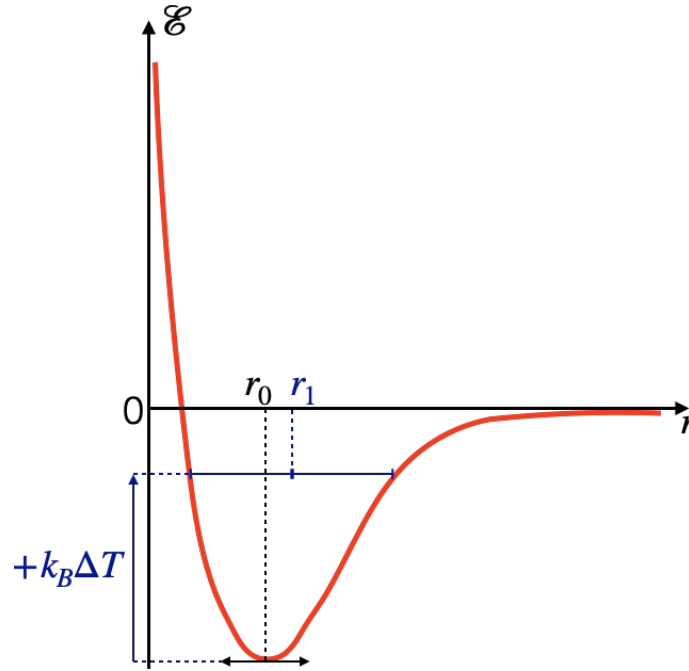


FIGURE 4.7 – Potentiel interatomique : effet de l’augmentation d’énergie due à une hausse de température.

donc proposer pour la représenter un tenseur isotrope, de la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \alpha \Delta T \mathbb{I}$$

où $\Delta T = T - T_{\text{réf}}$ est la variation de température vis-à-vis d’une température de référence $T_{\text{réf}}$, et α est appelé le coefficient de dilatation thermique, qui s’exprime en K^{-1} .

Le tableau 4.2 donne quelques ordres de grandeur des coefficients de dilatation thermique de plusieurs matériaux d’usage courant ; ceux-ci sont donnés à température ambiante, sachant que la température peut avoir une forte influence sur la valeur de ces coefficients.

R Certains matériaux, comme par exemple les composites à fibres longues représentés sur la figure 3.16, peuvent présenter des coefficients de dilatation thermique différents selon les directions considérées ; dans ce cas, le tenseur des petites déformations thermiques s’écrit comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = (\Delta T) \boldsymbol{\alpha}$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ est un tenseur symétrique d’ordre deux dans le cas général. Plus de précisions peuvent être trouvées dans [Ran03 ; Sal07].

4.3.2 Traitement d’un problème de thermoélasticité

Un problème de thermoélasticité se résout de la même façon qu’un problème axé sur les phénomènes mécaniques. On suppose pour cela que l’on connaît le champ de température $T(\mathbf{x}, t)$ en tout point $\mathbf{x}$ du domaine et à chaque instant t , et on remplace la relation de comportement « purement » mécanique par la relation suivante.

Résumé 4.2 — Comportement thermoélastique linéaire isotrope. Dans le cas d’une évolution anisotherme, la relation de comportement reliant les tenseurs des contraintes et des

Matériaux	Coefficient de dilatation thermique (K^{-1})
diamant	10^{-6}
carbure de silicium	$2,8 \times 10^{-6}$
verre (pyrex)	$3,2 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6}$
tungstène	$4,5 \times 10^{-6}$
verre	$8,5 \times 10^{-6}$
titane	$8,6 \times 10^{-6}$
fonte	$1,1 \times 10^{-5}$
béton	$1,2 \times 10^{-5}$
aciers de construction	$1,1 \times 10^{-5} - 1,3 \times 10^{-5}$
aciers inox	$1 \times 10^{-5} - 1,7 \times 10^{-5}$
cuivre	$1,7 \times 10^{-5}$
bronze	$1,8 \times 10^{-5}$
laiton	$1,9 \times 10^{-5}$
aluminium	$2,3 \times 10^{-5}$

TABLEAU 4.2 – Valeurs typiques pour divers matériaux du coefficient de dilatation thermique (à température ambiante).

petites déformations s'écrit, dans le cas d'un matériau thermoélastique linéaire isotrope :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T \right) &= \boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \alpha(\mathbf{x}) \Delta T(\mathbf{x}, t) \mathbb{I} \\ &= \frac{1 + \nu(\mathbf{x})}{E(\mathbf{x})} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \left(\alpha(\mathbf{x}) \Delta T(\mathbf{x}, t) - \frac{\nu(\mathbf{x})}{E(\mathbf{x})} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \right) \mathbb{I} \end{aligned}$$

quand on l'exprime en souplesse, ou encore

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T \right) - \alpha(\mathbf{x}) \Delta T(\mathbf{x}, t) \mathbb{I} \right) \\ &= (\lambda(\mathbf{x}) \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x}, t) - (3\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \alpha(\mathbf{x}) \Delta T(\mathbf{x}, t)) \mathbb{I} + 2\mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

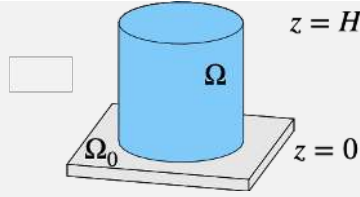
quand on l'exprime en rigidité. $\alpha(\mathbf{x})$ est le coefficient de dilatation thermique du matériau considéré.



Comme on l'a vu dans le tableau 4.1, le module de Young et le coefficient de Poisson, et, par conséquent, le tenseur d'élasticité $\mathbf{C}$, dépendent de la température ; si la variation ΔT de cette dernière est importante, il n'est alors pas possible de négliger, en toute rigueur, cette dépendance.

La même remarque est valable pour le coefficient de dilatation thermique α .

■ **Exemple 4.2 — Sollicitation thermique d'un barreau cylindrique.** On considère un barreau cylindrique Ω d'axe vertical $\mathbf{i}_z$, de section circulaire de rayon R et de hauteur H , posé sur un support Ω_0 rigide et fixe, sur lequel il peut glisser sans frottement. Par rapport à une température de référence T_0 , on élève l'ensemble du barreau à une température uniforme $T_f = T_0 + \Delta T$. On suppose que l'on peut négliger l'action de la pesanteur, et que le barreau est en équilibre statique. On considère que le matériau est homogène et isotrope, et reste dans son domaine d'élasticité linéaire, caractérisé par un module de Young E , un coefficient de Poisson ν et un coefficient de dilatation thermique α , tous trois supposés indépendants de la température.



L'équation à résoudre en tout point du domaine est donc :

$$\text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

sachant que la relation de comportement en souplesse s'écrit en tout point comme :

$$\frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T) = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \alpha \Delta T \mathbb{I}$$

Comme dans l'exemple 4.1, en introduisant la base cylindrique $(\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_z)$ associée au cylindre, on peut supposer que le champ de déplacement s'écrit comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_r(r, z) \mathbf{i}_r + u_z(r, z) \mathbf{i}_z$$

ce qui implique que le tenseur des petites déformations totales prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^t(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r}(\mathbf{x}) \otimes_S \mathbf{i}_r(\theta) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}(\mathbf{x}) \otimes_S \frac{\mathbf{i}_\theta(\theta)}{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(\mathbf{x}) \otimes_S \mathbf{i}_z \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, z) \mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_r(\theta) + \frac{u_r(r, z)}{r} \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(\theta) + \frac{\partial u_z}{\partial z}(r, z) \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z \\ &\quad + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}(r, z) + \frac{\partial u_z}{\partial r}(r, z) \right) \mathbf{i}_r(\theta) \otimes_S \mathbf{i}_z \end{aligned}$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, l'hypothèse de contact glissant avec le support permet d'exprimer que la composante verticale du déplacement est nulle (contact maintenu) :

$$\langle \mathbf{u}_{(z=0)}, \mathbf{i}_z \rangle = 0$$

tandis que les forces au contact sont purement normales (contact sans frottement) :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{(z=0)}(-\mathbf{i}_z), \mathbf{i}_r \rangle = 0 = \langle \boldsymbol{\sigma}_{(z=0)}(-\mathbf{i}_z), \mathbf{i}_\theta \rangle$$

En outre, les surfaces latérale et supérieure sont libres d'effort :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(r=R)} \mathbf{i}_r = \mathbf{0} = \boldsymbol{\sigma}_{(z=H)} \mathbf{i}_z$$

On vérifie alors facilement qu'un tenseur des contraintes nul vérifie l'ensemble des équations relatives aux contraintes ; ceci implique alors que :

$$\frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T) = \alpha \Delta T \mathbb{I}$$

soit, en termes d'équations scalaires :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, z) &= \alpha \Delta T \\ \frac{u_r(r, z)}{r} &= \alpha \Delta T \\ \frac{\partial u_z}{\partial z}(r, z) &= \alpha \Delta T \\ \frac{\partial u_r}{\partial z}(r, z) + \frac{\partial u_z}{\partial r}(r, z) &= 0 \end{aligned}$$

dont la solution est :

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= (\alpha \Delta T) r \\ u_z(r, z) &= (\alpha \Delta T) z \end{aligned}$$

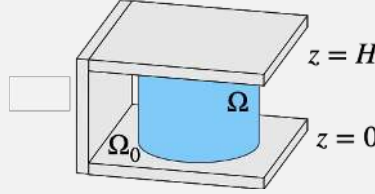
compte tenu de la condition limite en $z = 0$: $u_z(r, 0) = 0, \forall r$. Comme attendu, on retrouve une dilatation thermique uniforme du cylindre.

Si, maintenant, on imagine qu'au lieu d'être libre, la surface supérieure du cylindre est en contact sans frottement avec le même bâti fixe Ω_0 , la condition de bord libre en $z = H$ est remplacée par une condition sur la composante verticale du déplacement :

$$\langle \mathbf{u}_{(z=H)}, \mathbf{i}_z \rangle = 0$$

et la nullité des composantes horizontales du vecteur contrainte :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{(z=H)} \mathbf{i}_z, \mathbf{i}_r \rangle = 0 = \langle \boldsymbol{\sigma}_{(z=H)} \mathbf{i}_z, \mathbf{i}_\theta \rangle$$



On se propose alors de chercher la solution en déplacement sous une forme analogue à celle trouvée dans la situation précédente :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = ar\mathbf{i}_r + bz\mathbf{i}_z$$

où a et b sont deux constantes qu'il faut déterminer. Ce déplacement vérifie automatiquement la condition en $z = 0$, vu que $\langle \mathbf{u}_{(z=0)}, \mathbf{i}_z \rangle = 0$; pour qu'il vérifie celle en $z = H$, on doit avoir $bH = 0$, soit :

$$b = 0$$

Par conséquent, le tenseur des petites déformations totales s'écrit, en tout point, comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T) = a(\mathbf{i}_r \otimes \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_\theta \otimes \mathbf{i}_\theta)$$

ce qui permet d'obtenir le tenseur des contraintes par la relation de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}^t - \alpha \Delta T \mathbb{I}) = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^t - \alpha \Delta T \mathbb{I})) \mathbb{I} + \frac{E}{1+\nu} (\boldsymbol{\varepsilon}^t - \alpha \Delta T \mathbb{I})$$

soit, vu que $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^t - \alpha \Delta T \mathbb{I}) = 2a - 3\alpha \Delta T$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1-2\nu} \left(\left(\frac{a}{1+\nu} - \alpha \Delta T \right) (\mathbf{i}_r \otimes \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_\theta \otimes \mathbf{i}_\theta) + \left(\frac{2\nu a}{1+\nu} - \alpha \Delta T \right) \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z \right)$$

On vérifie alors facilement que ce tenseur des contraintes vérifie l'équation d'équilibre local :

$$\begin{aligned} \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \theta} \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} \mathbf{i}_z \\ &= \frac{E}{1-2\nu} \left(\frac{a}{1+\nu} - \alpha \Delta T \right) (\mathbf{i}_\theta \otimes \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_r \otimes \mathbf{i}_\theta - \mathbf{i}_r \otimes \mathbf{i}_\theta - \mathbf{i}_\theta \otimes \mathbf{i}_r) \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

En outre, le vecteur contrainte sur les faces supérieure et inférieure est colinéaire à $\mathbf{i}_z$:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(z=H)} \mathbf{i}_z = \frac{E}{1-2\nu} \left(\frac{2\nu a}{1+\nu} - \alpha \Delta T \right) \mathbf{i}_z = -\boldsymbol{\sigma}_{(z=0)} (-\mathbf{i}_z)$$

Enfin, la condition de bord libre sur la surface latérale permet de déterminer la constante a :

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\sigma}_{(r=R)} \mathbf{i}_r = \frac{E}{1-2\nu} \left(\frac{a}{1+\nu} - \alpha \Delta T \right) \mathbf{i}_r$$

soit :

$$a = (1+\nu)\alpha \Delta T$$

ce qui permet de conclure que le tenseur des contraintes est homogène, et vaut :

$$\boldsymbol{\sigma} = -E\alpha \Delta T \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z$$

Ceci permet donc de constater que, comme la dilatation thermique est entravée selon l'axe du cylindre, une contrainte uniaxiale de compression, d'origine thermique, se développe, proportionnelle au module de Young et au produit

du coefficient de dilatation thermique par la variation de température. Inversement, la dilatation peut s'effectuer librement dans la direction radiale :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (1 + \nu)\alpha\Delta T r \mathbf{i}_r(\theta)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (1 + \nu)\alpha\Delta T (\mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_r(\theta) + \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(\theta))$$

ce qui implique qu'il n'y a pas de contrainte radiale (ni circonférencielle).

En effet, si l'on envisage une dernière situation, où, cette fois-ci, l'ensemble de la surface du cylindre est entravée (en le plaçant par exemple dans un massif rigide de forme cylindrique de même rayon R), on trouve alors qu'il n'y a aucun déplacement au sein du barreau :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x}$$

ce qui implique que le tenseur des contraintes est d'origine thermique seulement (vu que $\boldsymbol{\varepsilon}^t = \mathbf{0}$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(-\alpha\Delta T \mathbb{I}) = -\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \mathbb{I}$$

et correspond à un état de compression uniforme et isotrope. ■

4.4 Résumé des formules importantes

Comportement élastique linéaire isotrope – Résumé 4.1 page 113

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbb{I}$$

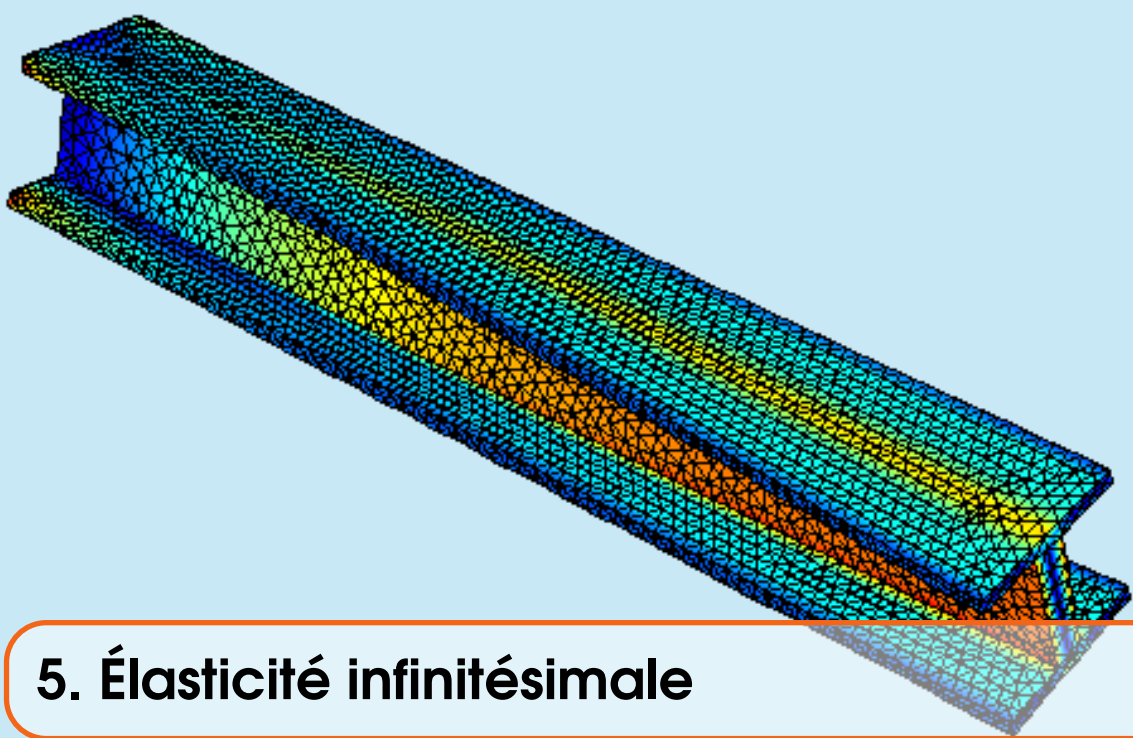
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Comportement thermoélastique linéaire isotrope – Résumé 4.2 page 116

$$\frac{1}{2}(\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^T) = \boldsymbol{\varepsilon}^t = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \alpha\Delta T\mathbb{I} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} + \left(\alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}\text{tr}\boldsymbol{\sigma}\right)\mathbb{I}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}^t - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) = \mathbf{C}\left(\frac{1}{2}(\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^T) - \alpha\Delta T\mathbb{I}\right) = (\lambda\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^t - (3\lambda+2\mu)\alpha\Delta T)\mathbb{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^t$$



5. Élasticité infinitésimale

Les chapitres précédents nous ont permis de poser l'ensemble des équations et conditions nécessaires pour résoudre un problème de mécanique dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope ; celui-ci est essentiel pour l'ingénieur, car nombre de structures sont dimensionnées pour fonctionner dans le domaine élastique. Il s'agit maintenant d'étudier les propriétés des solutions de ces problèmes, et de proposer des stratégies de résolution analytique (utiles pour des avant-projets de conception) ou numérique.

POURQUOI ÉTUDIER L'ÉLASTICITÉ ?

5.1 Poser un problème d'élasticité

L'objectif est de faire le bilan des équations et conditions limites nécessaires et suffisantes pour déterminer la solution d'un problème d'élasticité linéaire dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (HPP) et d'une évolution isotherme. On rappelle que cette solution, dont on va énoncer les principales propriétés mathématiques, se compose d'un vecteur de déplacement $\mathbf{u}$, d'un tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ (symétrique) et d'un tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ (symétrique lui aussi), qui sont tous fonctions de l'espace et du temps *a priori*. On résume sur un exemple précis, celui d'un barrage poids soumis à la pression hydrostatique de l'eau, illustré sur la figure 5.1, l'ensemble des équations et conditions à prendre en compte pour résoudre le problème (statique).

5.1.1 Équations à résoudre

Ces équations sont celles qui sont définies à l'intérieur du domaine matériel Ω considéré. La première, que l'on pourrait qualifier de fondamentale, est celle issue de la conservation de la quantité de mouvement, obtenue au paragraphe 2.3.1, qui fait intervenir la densité d'efforts volumiques $\mathbf{f}_V$ supposée connue en tout point de l'intérieur de Ω :

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) + \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t$$

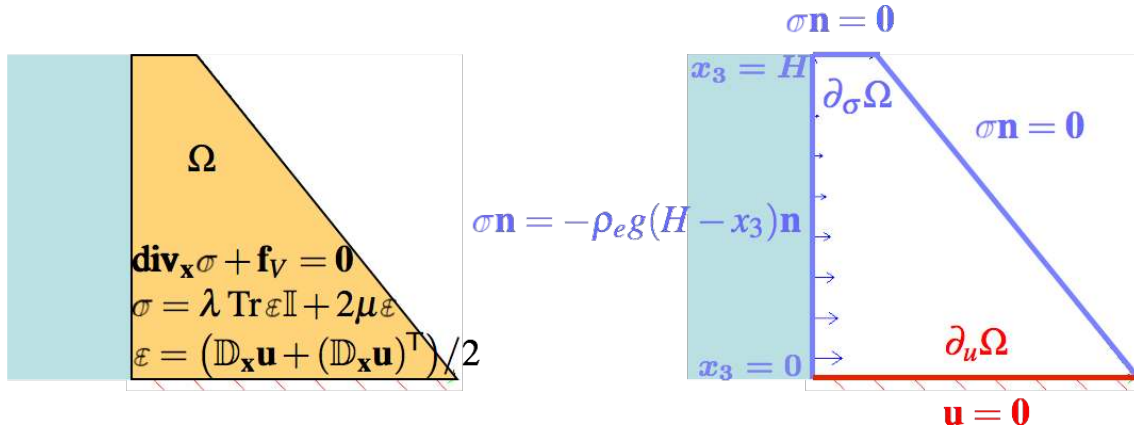


FIGURE 5.1 – Bilan des équations et conditions limites d'un problème d'élasticité.

qu'il s'agit d'expliciter ici un peu plus, dans le cadre HPP. Par définition, l'accélération est celle de la particule située en $\mathbf{x}$ à l'instant t , soit, en utilisant les résultats du paragraphe 1.1.2 :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{f}(\mathbf{p}, t), t) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial^2 (\mathbf{p} + \mathbf{u}(\mathbf{p}, t))}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{p}, t) = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{p}, t)$$

En outre, la conservation de la masse, obtenue dans le paragraphe 1.4.2, permet d'établir, pour la masse volumique, que :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{p})}{\det \mathbb{F}(\mathbf{p}, t)} \approx \rho_0(\mathbf{p}) (1 - \operatorname{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{u}(\mathbf{p}, t))$$

et, comme $\|\mathbf{u}(\mathbf{p}, t)\| \ll \mathcal{L}$, $\forall \mathbf{p} \in \Omega_0$ (où $\mathcal{L}$ est la taille caractéristique du domaine), on peut négliger $|\operatorname{div}_{\mathbf{p}} \mathbf{u}(\mathbf{p}, t)| \ll 1$, ce qui permet d'obtenir finalement :

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \approx \rho_0(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$$

en confondant $\mathbf{p} \approx \mathbf{x}$ du fait du cadre HPP, et en gardant finalement $\mathbf{x}$ comme variable spatiale. On aboutit ainsi à :

$$\rho_0(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t$$

Par ailleurs, sont vérifiées en tout point du domaine, et à tout instant, l'équation exprimant le tenseur des petites déformations comme la partie symétrique du tenseur gradient du déplacement, d'une part :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T \right), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t$$

et, d'autre part, la relation de comportement (élastique linéaire et isotrope) reliant les tenseurs des contraintes et des petites déformations, exprimée en rigidité :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x}) (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)) \mathbb{I} + 2\mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t$$

ou en souplesse :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{1 + \nu(\mathbf{x})}{E(\mathbf{x})} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \frac{\nu(\mathbf{x})}{E(\mathbf{x})} (\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) \mathbb{I}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t$$

Si les valeurs des paramètres « matériau » peuvent dépendre du point considéré, en pratique on essaiera plutôt de décomposer le domaine matériel Ω en plusieurs sous-domaines Ω_k distincts, sur lesquels ils peuvent être considérés constants :

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_k, \mu(\mathbf{x}) = \mu_k, \forall \mathbf{x} \in \Omega_k \text{ ou bien } E(\mathbf{x}) = E_k, \nu(\mathbf{x}) = \nu_k, \forall \mathbf{x} \in \Omega_k$$

Il sera alors important d'exprimer les conditions de raccord requises au niveau des interfaces entre ces différents sous-domaines, comme nous le précisons plus bas.

R Compte tenu du terme de dérivée seconde par rapport au temps, il est également nécessaire de connaître les déplacements et vitesses initiaux de l'ensemble des points du domaine :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \text{ et } \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

Dans le cas où les sollicitations exercées sur le domaine matériel sont indépendantes du temps, le problème est statique, et sa solution est indépendante du temps ; il n'y a donc plus besoin de spécifier de conditions initiales.

Dans le cas où la quantité d'accélération ($\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}$) peut être négligée à tout instant dans l'équation d'équilibre local, mais que le temps intervient encore dans les équations, on parle de problème « quasi-statique », ce qui consiste alors à considérer que la solution est une succession de solutions statiques, paramétrées par le temps. Là encore, aucune condition initiale n'est à fournir.

5.1.2 Conditions aux limites

Comme on l'a déjà vu dans les chapitres précédents, les conditions aux limites que l'on exprime sur les différentes frontières du domaine permettent de déterminer les constantes d'intégration nécessaires à la résolution des équations aux dérivées partielles du paragraphe précédent.

Conditions sur la frontière extérieure

L'hypothèse de base est que l'on dispose d'une condition connue, soit en déplacement, soit en efforts surfaciques, en tout point de la frontière extérieure du domaine, et selon chaque direction de l'espace. En notant cette partition $\partial\Omega = \partial_u\Omega \cup \partial_\sigma\Omega$, $\partial_u\Omega \cap \partial_\sigma\Omega = \emptyset$, où $\partial_u\Omega$ et $\partial_\sigma\Omega$ désignent ce qui concerne les déplacements donnés $\mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t)$ et les efforts surfaciques connus $\mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t)$, respectivement :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u\Omega, \quad \forall t, \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_\sigma\Omega, \quad \forall t$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est la normale extérieure au domaine, au point $\mathbf{x}$ considéré.



Il est important de bien saisir que la partition de la frontière que l'on vient d'établir est à interpréter en termes de composantes également : ainsi, il est possible en un point donné de n'imposer qu'une ou deux composantes du déplacement, tandis que la (les) composante(s) du vecteur contrainte, selon la (les) direction(s) laissée(s) « libre(s) » en déplacements, doit (doivent) être imposée(s). C'est d'ailleurs le cas de conditions de contact sans frottement, évoquées ci-dessous.

Dans le cas d'une partie de la frontière en contact avec un solide indéformable, supposé fixe, plusieurs situations peuvent se rencontrer :

- s'il y a adhésion au niveau de la surface de contact Σ_c , les points de cette surface restent donc fixes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_c, \quad \forall t$$

- si le contact autorise des mouvements relatifs, et que les glissements associés se font sans frottement, il faut alors exprimer le fait qu'il n'y a pas de composantes tangentielles des efforts surfaciques de contact ; si $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est la normale (sortante) locale au contact, on impose ainsi :

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad \text{et} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{t} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{t} \perp \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_c, \quad \forall t$$

où la première condition traduit le maintien du contact du point de vue de la cinématique.



Il est bien sûr possible de généraliser les conditions précédentes au cas d'un solide indéformable mobile ; le mouvement de ce dernier peut alors être une translation, ou une petite rotation (ou encore l'association de ces deux derniers déplacements de solide indéformable), comme par exemple :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \varphi(t) \mathbf{e} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O)$$

dans le cas d'une (petite) rotation d'angle $\varphi(t)$, et d'axe $\mathbf{e}$ et de centre $\mathbf{x}_O$ fixes, comme développé dans l'annexe A.2.6.

Dans certains cas, les efforts surfaciques locaux ne sont pas connus précisément sur la surface Σ_d où ils sont appliqués, et il est seulement possible d'imposer les expressions $\mathbf{R}^d(t)$ et $\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O}^d(t)$ respectives de la résultante et du moment (au point $\mathbf{x}_O$) de ces efforts :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_d} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS_x &= \mathbf{R}^d(t), \quad \forall t \\ \int_{\Sigma_d} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x})) dS_x &= \mathbf{M}_{\mathbf{x}_O}^d(t), \quad \forall t \end{aligned}$$

■ **Exemple 5.1 — Torsion d'un arbre cylindrique de section quelconque : mise en équations.** On s'intéresse ici à la torsion d'un arbre cylindrique, d'axe $\mathbf{e}$ et de hauteur H , et dont la section peut être de forme quelconque. On suppose que les efforts sont appliqués de façon suffisamment progressive pour que l'on puisse se mettre dans un cadre quasi-statique. En outre, on considère que l'on peut négliger l'action de la pesanteur. Enfin, on suppose que le matériau est homogène isotrope, dans son domaine d'élasticité linéaire, et dans le cadre HPP. Les équations à l'intérieur du domaine sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbb{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

En termes de conditions aux limites, la machine d'essai a pour but d'appliquer un moment d'axe $\mathbf{e}$ à chaque extrémité de l'éprouvette de façon à faire tourner l'une par rapport à l'autre d'un certain angle autour de $\mathbf{e}$. Il n'est pas possible d'avoir accès précisément à la répartition locale des efforts surfaciques exercés sur les surfaces extrêmes Σ_0 (en $x_3 = 0$) et Σ_H (en $x_3 = H$), ce qui implique que l'on va juste chercher à vérifier que :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_H) \wedge (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}) dS_x &= M_d^H \mathbf{e} \\ \int_{\Sigma_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge (\boldsymbol{\sigma} (-\mathbf{e})) dS_x &= M_d^O \mathbf{e} \end{aligned}$$

où les moments peuvent être calculés aux centres des sections extrêmes par exemple (respectivement $\mathbf{x}_O$ et $\mathbf{x}_H$). Dans les deux cas, il s'agit d'un couple, car les résultantes des actions de la machine sur les deux extrémités sont nulles :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_H} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} dS_x &= \mathbf{0} \\ \int_{\Sigma_0} \boldsymbol{\sigma} (-\mathbf{e}) dS_x &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Enfin, les surfaces latérales sont libres de tout effort. ■

Conditions sur les frontières intérieures

Des conditions supplémentaires sont requises quand le domaine matériel étudié est décomposé en plusieurs sous-domaines de propriétés différentes (généralement homogènes) : c'est au niveau des interfaces Σ_i entre les sous-domaines qu'il faut préciser cette fois-ci simultanément des conditions en déplacement et des conditions en efforts surfaciques, vu que rien n'est connu *a priori*.

Ainsi, dans le cas courant d'une interface d'adhésion parfaite entre deux sous-domaines Ω_k et Ω_l , on doit écrire, d'une part, la continuité du vecteur déplacement (vu que le collage contraint les

points de l'interface à vérifier les expressions des déplacements $\mathbf{u}^{\textcircled{k}}$ et $\mathbf{u}^{\textcircled{l}}$ respectivement associés à Ω_k et Ω_l) :

$$\mathbf{u}^{\textcircled{k}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{\textcircled{l}}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_i, \quad \forall t$$

et, d'autre part, la continuité du vecteur contrainte que l'on avait établie dans le paragraphe 2.3.2, à savoir :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\textcircled{k}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^{\textcircled{l}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_i, \quad \forall t$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est la normale locale à Σ_i , de sens fixé arbitrairement.

R D'autres conditions d'interface sont bien sûr envisageables. Si, par exemple, les deux milieux déformables peuvent glisser sans frotter l'un sur l'autre, seules les composantes normales sont liées :

$$\langle \mathbf{u}^{\textcircled{k}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \mathbf{u}^{\textcircled{l}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle, \quad \text{et} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}^{\textcircled{k}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}^{\textcircled{l}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_i, \quad \forall t$$

sachant que l'on a également :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{\textcircled{k}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{t} \rangle = 0 = \langle \boldsymbol{\sigma}^{\textcircled{l}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{t} \rangle, \quad \forall \mathbf{t} \perp \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_i, \quad \forall t$$

Résumé 5.1 — Formulation générique d'un problème d'élasticité. Connaissant :

- la densité volumique d'efforts $\mathbf{f}_V$ exercée en tout point de l'intérieur du domaine matériel Ω ;
- la densité surfacique d'efforts $\mathbf{f}_S$ appliquée en tout point de la partie $\partial_\sigma \Omega_t$ de la frontière extérieure $\partial \Omega$ du domaine;
- le déplacement $\mathbf{u}_d$ imposé en tout point de la partie complémentaire $\partial_u \Omega$ de la frontière extérieure $\partial \Omega$;

le problème consiste à trouver les champs $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ vérifiant les équations et conditions suivantes :

1. équations et conditions cinématiques :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^T \right), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u \Omega, \quad \forall t$$

2. équations et conditions en efforts :

$$\rho_0(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_\sigma \Omega, \quad \forall t$$

3. relation de comportement (en rigidité, ou en souplesse) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x}) (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)) \mathbb{I} + 2\mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{1 + \nu(\mathbf{x})}{E(\mathbf{x})} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \frac{\nu(\mathbf{x})}{E(\mathbf{x})} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)) \mathbb{I}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t$$

4. conditions initiales :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

Dans le cas où plusieurs (sous-)domaines matériels sont considérés, des conditions de raccord sur les déplacements et les vecteurs contraintes sont à exprimer sur les interfaces associées.

5.1.3 Propriétés de la solution

Dès lors que l'on a imposé toutes les conditions aux limites détaillées dans le paragraphe précédent, il est possible de montrer mathématiquement qu'il existe une solution au problème posé. Toutefois, un cas particulier est à envisager ; dans le cas statique, si aucune condition n'est imposée au déplacement ($\partial_u \Omega = \emptyset$), il ne peut y avoir de solution que si le domaine matériel considéré est effectivement en équilibre statique, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f}_V dV_x + \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}_S dS_x &= \mathbf{0} \\ \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_V dV_x + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_S dS_x &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

en un point O fixe donné.

Une autre propriété mathématique, que nous allons étudier ici, est l'unicité de cette solution, ce qui permettra de mettre en place des stratégies spécifiques de résolution, comme détaillé dans le paragraphe 5.2.

Unicité dans le cadre statique

Supposons que l'on est en mesure d'obtenir deux solutions en déplacement $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ du même problème sur le domaine considéré ; elles vérifient alors toutes deux ($k = 1$ ou $k = 2$) au sein de ce domaine les équations dans le cadre statique :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_k + \mathbf{f}_V \\ \boldsymbol{\sigma}_k &= \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_k \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_k + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_k)^T \right) \end{aligned}$$

ainsi que, comme conditions aux limites :

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_u \Omega, \text{ et } \boldsymbol{\sigma}_k \mathbf{n} = \mathbf{f}_S \text{ sur } \partial_{\sigma} \Omega$$

En soustrayant deux à deux toutes ces équations, on constate que la différence $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ entre les deux solutions est elle-même solution d'un problème d'élasticité avec efforts volumiques nuls :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_1 - \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_2 = \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_w \\ \boldsymbol{\sigma}_w &= \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_w \\ \boldsymbol{\varepsilon}_w &= \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_1 + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_1)^T) - \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_2 + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_2)^T) = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{w} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{w})^T) \end{aligned}$$

et dont les conditions aux limites sont nulles également :

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_u \Omega, \text{ et } \boldsymbol{\sigma}_w \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_{\sigma} \Omega$$

En multipliant scalairement l'équation d'équilibre intérieur par $\mathbf{w}$, puis en intégrant sur le domaine, on trouve alors :

$$\int_{\Omega} \langle \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_w, \mathbf{w} \rangle dV_x = 0$$

En utilisant ensuite la formule $\text{div}_{\mathbf{x}} (\mathbb{A}^T \mathbf{a}) = \langle \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{A}, \mathbf{a} \rangle + \text{tr} (\mathbb{A} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{a})^T)$ établie dans l'annexe B.1.1, on obtient alors :

$$- \int_{\Omega} \text{tr} (\boldsymbol{\sigma}_w (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{w})^T) dV_x + \int_{\Omega} \text{div}_{\mathbf{x}} (\boldsymbol{\sigma}_w^T \mathbf{w}) dV_x = 0$$

En utilisant maintenant la formule de la divergence (détaillée dans l'annexe B.2.2), on transforme la seconde intégrale pour aboutir à :

$$\int_{\Omega} \text{tr} (\boldsymbol{\sigma}_w (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{w})^T) dV_x = \int_{\Omega} \text{div}_{\mathbf{x}} (\boldsymbol{\sigma}_w^T \mathbf{w}) dV_x = \int_{\partial\Omega} \langle \boldsymbol{\sigma}_w^T \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle dS_x = \int_{\partial\Omega} \langle \boldsymbol{\sigma}_w \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle dS_x = 0$$

vu que, sur la frontière, on a soit $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, soit $\boldsymbol{\sigma}_w \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Comme $\boldsymbol{\sigma}_w$ est symétrique, on peut écrire que :

$$0 = \int_{\Omega} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_w(\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{w})^T) dV_x = \int_{\Omega} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_w \mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{w}) dV_x = \int_{\Omega} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_w \boldsymbol{\varepsilon}_w) dV_x$$

et, en explicitant la relation de comportement à l'aide des paramètres de Lamé, on établit finalement que :

$$\int_{\Omega} (\lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_w)^2 + 2\mu \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_w^2)) dV_x = 0$$

Comme $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, on en déduit que $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_w^2) = \|\boldsymbol{\varepsilon}_w\|^2 = 0$, et donc, nécessairement, que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_w = \mathbf{0}$$

Pour remonter au déplacement $\mathbf{w}$, on peut poser les équations vérifiées par les composantes $w_k(x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbf{w}$ dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_2} = 0 \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à x_1 la première équation de la seconde ligne, on établit que :

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2}$$

vu que w_1 ne dépend pas de x_1 (compte tenu de la première équation de la première ligne). En agissant de même vis-à-vis de x_3 , puis avec les autres composantes, on arrive à établir que :

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_l^2} = 0, \quad 1 \leq k \leq 3, \quad 1 \leq l \neq k \leq 3$$

ce qui implique que :

$$w_k = a_k + b_{kl}x_l + c_{km}x_m, \quad 1 \leq k \leq 3, \quad 1 \leq l \neq k \leq 3, \quad 1 \leq m \neq k, m \neq l \leq 3$$

où les coefficients a_k , b_{kl} et c_{km} sont constants. En injectant ces formes dans les équations faisant intervenir les dérivées croisées :

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_2} = 0$$

on conclut que les différents coefficients b_{kl} et c_{km} sont opposés deux à deux, et que $\mathbf{w}$ est un déplacement de solide indéformable (pour le cadre HPP) :

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O)$$

vu qu'il s'agit de l'addition d'une translation et d'une (petite) rotation arbitraires.

Enfin, on sait que $\mathbf{w}$ s'annule sur $\partial_u \Omega$; s'il s'agit effectivement d'une surface, alors ceci implique que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ partout, et donc que la solution est unique; en revanche, s'il n'y a pas de condition en déplacements imposés ($\partial_u \Omega = \emptyset$), ou si $\partial_u \Omega$ est réduit à un point ou une ligne, la solution n'est pas unique, mais définie à un (petit) mouvement de solide indéformable près.



Les conclusions sont les mêmes dans le cadre quasi-statique : en effet, comme on peut considérer qu'il s'agit d'une suite d'états d'équilibre, il suffit d'appliquer le raisonnement précédent à chaque instant t .

■ **Exemple 5.2 — Torsion d'un arbre cylindrique de section quelconque : existence et unicité de la solution.** On poursuit l'exemple 5.1 en analysant les propriétés attendues pour la solution.

D'une part, il s'agit d'un problème où aucune condition en déplacement n'est spécifiée ($\partial_u \Omega = \emptyset$) ; comme nous sommes en (quasi-)statique, il est nécessaire, pour que la solution existe, que les actions exercées sur l'éprouvette se compensent, ce qui implique que les deux couples appliqués doivent être opposés l'un de l'autre, à chaque instant t :

$$M_d^H(t) = -M_d^O(t) = C(t)$$

D'autre part, comme nous avons imposé uniquement des conditions globales en résultantes et moments plutôt que des densités locales d'efforts, il ne peut pas y avoir d'unicité de la solution. On verra dans l'exemple 5.6 comment affirmer que l'on peut trouver une solution en contraintes qui a du sens vis-à-vis de notre problème. Par ailleurs, comme $\partial_u \Omega = \emptyset$, le déplacement associé au champ de contraintes n'est théoriquement défini qu'à un (petit) mouvement de solide indéformable près, mais on peut supposer ce dernier nul vu qu'il ne nous intéresse pas dans le problème considéré : en effet, nous n'aurons besoin que de l'écart angulaire entre les deux sections extrêmes pour déterminer la rigidité en torsion de l'éprouvette. ■

Unicité dans le cadre dynamique

La démarche est similaire quand on tient compte des aspects dynamiques ; en posant $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ la différence entre deux champs de déplacements solutions, on constate que $\mathbf{w}$ vérifie exactement les mêmes équations que dans le cadre statique, excepté l'équation d'équilibre local qui garde le terme en quantité d'accélération :

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{w}} = \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_w$$

et la présence de conditions initiales nulles sur le domaine Ω :

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}, \text{ et } \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{0}, \text{ pour } t = 0$$

En multipliant l'équation d'équilibre scalairement par $\dot{\mathbf{w}}$, et en l'intégrant spatialement sur le domaine, et entre les instants initial $\tau = 0$ et actuel $\tau = t$, on obtient :

$$\int_0^t \int_{\Omega} \langle \rho_0 \ddot{\mathbf{w}}, \dot{\mathbf{w}} \rangle dV_x d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} \langle \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_w, \dot{\mathbf{w}} \rangle dV_x d\tau$$

Le membre de gauche peut se simplifier, en constatant que $\langle \rho_0 \ddot{\mathbf{w}}, \dot{\mathbf{w}} \rangle = \rho_0 \overline{\langle \dot{\mathbf{w}}, \dot{\mathbf{w}} \rangle}$, tandis que le membre de droite peut être transformé de la même façon que dans le cas statique, pour obtenir finalement que :

$$\int_{\Omega} \rho_0 \|\dot{\mathbf{w}}\|^2 dV_x = - \int_0^t \int_{\Omega} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_w \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_w) dV_x d\tau = - \int_0^t \int_{\Omega} \text{tr}(\mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_w \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_w) dV_x d\tau = - \int_{\Omega} \text{tr}(\mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_w^2) dV_x$$

vu que $\text{tr}(\mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_w \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_w) = \overline{\text{tr}(\mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_w^2)}$, et les conditions initiales nulles ; on aboutit alors à :

$$\int_{\Omega} \left(\rho_0 \|\dot{\mathbf{w}}\|^2 + \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\epsilon}_w)^2 + 2\mu \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}_w^2) \right) dV_x = 0$$

Comme $\rho_0 > 0$, on conclut que $\dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$, $\forall t$, et donc que $\mathbf{w}$ est indépendant du temps, soit, finalement, comme les conditions initiales sont nulles :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t$$

Dans le cadre dynamique, il y a donc systématiquement unicité de la solution.

5.2 Méthodes de résolution d'un problème d'élasticité

Maintenant que l'on a précisé l'ensemble des équations et conditions aux limites à vérifier, il reste à étudier ici sous quel angle aborder le problème afin de le résoudre efficacement. En pratique, hormis la relation de comportement, chaque équation (ou condition) concerne soit l'aspect cinématique (au travers du champ de déplacement $\mathbf{u}$ ou du tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, ainsi que des conditions aux limites imposées), soit l'aspect « statique » (au travers du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et des efforts appliqués au domaine) ; il semble donc judicieux de choisir par quel aspect on souhaite donc aborder le problème.

5.2.1 Approche en déplacement

Une première possibilité est de privilégier l'aspect cinématique : en effet, il est souvent plus simple de faire des hypothèses sur les déplacements, qui sont plus « proches » de l'intuition mécanique que l'on peut avoir du problème, que sur les champs de contraintes, souvent plus complexes, et qui présentent deux fois plus de composantes *a priori*.

Stratégie de résolution en déplacement

Le point de départ consiste à tenter de se donner une forme *a priori* $\mathbf{u}_{fd}$ pour le déplacement recherché : ceci peut consister à :

- éliminer des composantes que l'on suspecte nulles ;
- éliminer des dépendances vis-à-vis de certaines variables de l'espace, sachant que la question de la dépendance en temps est tranchée suivant que l'on fait l'hypothèse que le problème peut être résolu en (quasi-)statique ou non ;
- proposer des formes qui font sens sur le plan mécanique : translation, petite rotation de solide indéformable, allongement, glissement, ...

Si rien ne peut être proposé, on reste avec la forme la plus générale du déplacement, qui présente alors trois composantes qui dépendent chacune des trois variables de l'espace. En revanche, le choix de la base d'expression des composantes doit être le plus judicieux possible : si le domaine est de forme cylindrique de révolution, une base cylindrique associée à cette géométrie s'impose tout naturellement.

La stratégie consiste alors à vérifier successivement les différentes équations et conditions aux limites pour pouvoir conclure si la forme proposée est la solution du problème ; en effet, si tout est vérifié, la propriété d'unicité (à un mouvement de solide indéformable près, dans certains cas) que l'on a établie dans le paragraphe 5.1.3 permet de garantir cette conclusion. Les étapes sont donc les suivantes :

1. on commence par exprimer les conditions aux limites en déplacement avec la forme retenue pour ce dernier, ce qui peut éventuellement la préciser encore un peu plus :

$$\mathbf{u}_{fd} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_u \Omega$$

2. on calcule le tenseur des petites déformations, puis le tenseur des contraintes à l'aide de la relation de comportement en rigidité :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{fd} &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{fd} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{fd})^T \right) \\ \boldsymbol{\sigma}_{fd} &= \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{fd} \end{aligned}$$

3. on explicite l'équation d'équilibre local, soit pour la vérifier, soit pour en déduire une (des) équation(s) différentielle(s) que doivent vérifier les fonctions qui restent encore à déterminer :

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_{fd} + \mathbf{f}_V = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_{fd}$$

4. on explicite les conditions aux limites en efforts (surfaiques) appliqués, soit pour les vérifier, soit pour en déduire des constantes d'intégration permettant de résoudre les équations différentielles précédentes :

$$\boldsymbol{\sigma}_{fd} \mathbf{n} = \mathbf{f}_S \text{ sur } \partial_{\sigma} \Omega$$

Une fois ces étapes accomplies, plusieurs situations sont possibles :

- soit on a vérifié l'ensemble des équations et conditions aux limites : on peut alors affirmer que l'on a déterminé la solution du problème $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{fd}$, et, par conséquent, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{fd}$ et $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{fd}$;
- soit une condition aux limites (voire une équation) n'est pas vérifiée exactement : il sera peut-être possible, avec les considérations du paragraphe 5.2.3, de conclure que la forme adoptée pour le déplacement constitue une solution approchée ;
- soit on a abouti à une (des) équation(s) différentielle(s) avec condition(s) aux limites associée(s) : si l'on peut la résoudre analytiquement, on tient alors la solution du problème ; sinon, une résolution approchée, comme ce qui est proposé dans le paragraphe 5.2.3, sera peut-être envisageable.

■ **Exemple 5.3 — Torsion d'un arbre cylindrique de section quelconque : approche en déplacement.** On se propose ici de résoudre par une approche en déplacement le problème de la torsion d'un arbre de section quelconque, dans le cadre HPP, dont on a précisé les équations et conditions aux limites dans l'exemple 5.1.

Il faut maintenant proposer une forme « raisonnable » pour le champ de déplacement recherché ; on sait que, dans le cas de la torsion d'un arbre cylindrique de révolution, les différentes sections tournent, autour de l'axe $\mathbf{e}$ de l'arbre, comme des solides indéformables les uns par rapport aux autres. En revanche, l'expérience montre que, pour d'autres formes, les sections ne restent pas planes car un déplacement axial hétérogène est visible : on parle alors de « gauchissement ». On est donc conduit à choisir comme déplacement, dans une base cartésienne ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 = \mathbf{e}$), de coordonnées associées (x_1, x_2, x_3) centrées sur l'axe du cylindre, l'association d'une « petite » rotation (différente pour chaque section) autour de $\mathbf{e}$ et d'un déplacement hétérogène selon $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{u}_{fd}(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_3 \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma} + \varphi(x_1, x_2) \mathbf{e})$$

avec $\mathbf{x}_{\Sigma} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2$ désignant le placement des points d'une section Σ , et où α est appelé « angle unitaire de torsion » et correspond à l'angle de la rotation relative entre les deux sections extrêmes divisé par la hauteur de l'arbre. La quantité $\alpha \varphi$ représente alors le gauchissement, que l'on suppose identique dans chaque section.

Comme il n'y a pas de conditions en déplacement à vérifier, l'étape suivante consiste à calculer le tenseur des petites déformations :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{fd} = \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{fd} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{fd})^T \right)$$

avec :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{fd} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{u}_{fd}}{\partial x_k} \otimes \mathbf{i}_k = \sum_{k=1}^2 \alpha \left(x_3 \mathbf{e} \wedge \mathbf{i}_k + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \mathbf{e} \right) \otimes \mathbf{i}_k + \alpha (\mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) \otimes \mathbf{e}$$

d'où :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{fd} = \alpha (\nabla_{\mathbf{x}_{\Sigma}} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) \otimes_S \mathbf{e}$$

puisque $\sum_{k=1}^2 ((\mathbf{e} \wedge \mathbf{i}_k) \otimes \mathbf{i}_k)^T = - \sum_{k=1}^2 (\mathbf{e} \wedge \mathbf{i}_k) \otimes \mathbf{i}_k$, et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 = \nabla_{\mathbf{x}_{\Sigma}} \varphi$.

Comme $\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = 0$, on en déduit donc que le tenseur des contraintes s'exprime directement comme :

$$\boldsymbol{\sigma}_{fd} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{fd} = 2\mu \alpha (\nabla_{\mathbf{x}_{\Sigma}} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) \otimes_S \mathbf{e}$$

Ce dernier doit alors vérifier l'équation d'équilibre local, soit :

$$\mathbf{0} = \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x_k} \mathbf{i}_k = \mu \alpha \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) \mathbf{e}$$

ce qui montre, d'une part, que la cinématique de torsion induit une contrainte compatible avec l'équation d'équilibre local, et, d'autre part, que le gauchissement doit vérifier :

$$\Delta_{\mathbf{x}_{\Sigma}} \varphi = 0$$

Par ailleurs, on doit considérer les conditions en efforts appliqués ; tout d'abord, les surfaces latérales Σ_l doivent être libres d'effort, soit :

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\sigma}_{fd} \mathbf{n}_l = 2\mu \alpha (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma) \otimes_S \mathbf{e} \mathbf{n}_l = \mu \alpha \langle \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{n}_l \rangle \mathbf{e}$$

en tout point de Σ_l , de normale sortante $\mathbf{n}_l \perp \mathbf{e}$. En posant $\mathbf{t}_l = \mathbf{e} \wedge \mathbf{n}_l$ le vecteur (perpendiculaire à l'axe $\mathbf{e}$) tangent à la surface, on obtient alors que la dérivée normale du gauchissement doit vérifier :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \langle \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi, \mathbf{n}_l \rangle = \langle \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{t}_l \rangle$$

en tout point des surfaces latérales Σ_l . Comme la condition est indépendante de x_3 , il suffit de vérifier cette condition sur le contour d'une section arbitraire.

Enfin, on doit retrouver les conditions globales imposées par la machine d'essai sur les deux surfaces extrêmes en $x_3 = 0$ et $x_3 = H$, à savoir des résultantes nulles, et des moments de direction $\mathbf{e}$. En ce qui concerne le calcul de la résultante de l'action de la machine sur la surface Σ_H , on trouve alors :

$$\mathbf{R}^H = \int_{\Sigma_H} \boldsymbol{\sigma}_{fd} \mathbf{e} dS_x = \int_{\Sigma_H} \alpha \mu (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma) dS_x$$

En utilisant les propriétés de la divergence exposées dans l'annexe B.1.1, on peut réécrire que :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma &= (\mathbb{D}_{\mathbf{x}_\Sigma} \mathbf{x}_\Sigma) (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma) \\ &= \mathbf{div}_{\mathbf{x}_\Sigma} (\mathbf{x}_\Sigma \otimes (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma)) - \mathbf{div}_{\mathbf{x}_\Sigma} (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma) \mathbf{x}_\Sigma \\ &= \mathbf{div}_{\mathbf{x}_\Sigma} (\mathbf{x}_\Sigma \otimes (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma)) - \mathbf{div}_{\mathbf{x}_\Sigma} (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi) \mathbf{x}_\Sigma \\ &= \mathbf{div}_{\mathbf{x}_\Sigma} (\mathbf{x}_\Sigma \otimes (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma)) \end{aligned}$$

vu que $\mathbf{div}_{\mathbf{x}_\Sigma} (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi) = \Delta_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi = 0$ en vertu de l'équation déterminée plus haut. Ainsi, en utilisant la formule de Stokes, on trouve que :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^H &= \alpha \mu \int_{\Sigma_H} \mathbf{div}_{\mathbf{x}_\Sigma} (\mathbf{x}_\Sigma \otimes (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma)) dS_x \\ &= \alpha \mu \int_{\partial \Sigma_H} (\mathbf{x}_\Sigma \otimes (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma)) \mathbf{n}_l dl_x \\ &= \alpha \mu \int_{\partial \Sigma_H} \langle \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{n}_l \rangle \mathbf{x}_\Sigma dl_x = \mathbf{0} \end{aligned}$$

qui s'annule compte tenu de la condition à vérifier sur le contour d'une section. Le calcul de la résultante $\mathbf{R}^O$ est identique (au signe près).

En ce qui concerne le moment, on peut se contenter de montrer qu'il est bien de direction $\mathbf{e}$, en constatant que :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}^H, \mathbf{i}_1 \rangle &= \int_{\Sigma_H} \langle \mathbf{x}_\Sigma \wedge (\boldsymbol{\sigma}_{fd} \mathbf{e}), \mathbf{i}_1 \rangle dS_x = \int_{\Sigma_H} \alpha \mu \langle \mathbf{x}_\Sigma \wedge (\nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma), \mathbf{i}_1 \rangle dS_x \\ &= \int_{\Sigma_H} \alpha \mu \langle \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{x}_\Sigma \rangle dS_x = 0 \end{aligned}$$

car $(\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{x}_\Sigma) \parallel \mathbf{e}$. On obtient bien sûr le même résultat vis-à-vis de $\mathbf{i}_2$.

Afin de traiter un cas concret, considérons une section de forme elliptique pleine, de demi-axes a et b selon $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_2$ respectivement. On cherche alors la fonction de gauchissement sous la forme :

$$\varphi(x_1, x_2) = kx_1x_2$$

où k est une constante. On vérifie immédiatement que $\Delta_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi = 0$ dans la section. Par ailleurs, on doit avoir comme conditions aux limites latérales que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \langle \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \wedge \mathbf{n}_l \rangle$$

où $\mathbf{n}_l$ est le vecteur normal sortant de la frontière de la section elliptique, qui est d'équation $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$, soit :

$$\left\langle \mathbf{n}_l, \frac{2x_1}{a^2} \mathbf{i}_1 + \frac{2x_2}{b^2} \mathbf{i}_2 \right\rangle = 0$$

On obtient alors :

$$\left\langle kx_2\mathbf{i}_1 + kx_1\mathbf{i}_2, \frac{2x_1}{a^2}\mathbf{i}_1 + \frac{2x_2}{b^2}\mathbf{i}_2 \right\rangle = \left\langle x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2, \frac{2x_1}{a^2}\mathbf{e} \wedge \mathbf{i}_1 + \frac{2x_2}{b^2}\mathbf{e} \wedge \mathbf{i}_2 \right\rangle$$

soit :

$$\frac{2kx_1x_2}{a^2} + \frac{2kx_1x_2}{b^2} = \frac{2x_1x_2}{a^2} - \frac{2x_2x_2}{b^2}$$

ce qui permet d'établir finalement que :

$$k = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$$

Dans le cas d'une section circulaire ($a = b$), on retrouve naturellement que la torsion se fait sans gauchissement ($\varphi = 0$). ■

Équation de Navier

Dans le cas où l'on ne fait aucune hypothèse sur le champ de déplacement recherché, la démarche précédente permet d'obtenir un ensemble d'équations différentielles (et de conditions aux limites associées) qui ne font intervenir que le champ de déplacement. En effet, en injectant la relation de comportement exprimée en rigidité dans l'équation d'équilibre local, on obtient :

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V = \mathbf{div}_x (\lambda (\text{tr} \boldsymbol{\epsilon}) \mathbb{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{f}_V = \lambda \mathbf{div}_x ((\text{tr} \boldsymbol{\epsilon}) \mathbb{I}) + \mu \mathbf{div}_x (\mathbb{D}_x \mathbf{u}) + \mu \mathbf{div}_x ((\mathbb{D}_x \mathbf{u})^T) + \mathbf{f}_V$$

si l'on fait l'hypothèse ici que les paramètres de Lamé (λ, μ) sont homogènes. En utilisant certaines formules de l'annexe B.1.2, on peut transformer les divergences présentes dans l'équation précédente respectivement comme :

- $\mathbf{div}_x ((\text{tr} \boldsymbol{\epsilon}) \mathbb{I}) = \nabla_x (\text{tr} \boldsymbol{\epsilon}) = \nabla_x (\mathbf{div}_x \mathbf{u})$, où ∇_x désigne le gradient spatial ;
- $\langle \mathbf{div}_x (\mathbb{D}_x \mathbf{u}), \mathbf{c} \rangle = \text{div}_x ((\mathbb{D}_x \mathbf{u})^T \mathbf{c}) = \text{div}_x (\nabla_x \langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle) = \Delta_x \langle \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle = \langle \Delta_x \mathbf{u}, \mathbf{c} \rangle$, $\forall \mathbf{c}$ constant, où Δ_x est le laplacien (vectoriel), défini dans l'annexe B.1.1, et :
- $\langle \mathbf{div}_x ((\mathbb{D}_x \mathbf{u})^T), \mathbf{c} \rangle = \text{div}_x ((\mathbb{D}_x \mathbf{u}) \mathbf{c}) = \langle \nabla_x (\mathbf{div}_x \mathbf{u}), \mathbf{c} \rangle$, $\forall \mathbf{c}$ constant, à l'aide d'un vecteur $\mathbf{c}$ constant choisi arbitrairement.

On aboutit ainsi à ce que l'on appelle classiquement l'équation de Navier.

Équation de Navier. La formulation en déplacement d'un problème d'élasticité linéaire homogène isotrope (dans le cadre HPP) consiste à résoudre l'équation dite de Navier :

$$(\lambda + \mu) \nabla_x (\mathbf{div}_x \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mu \Delta_x \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_V(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t$$

dont les projections scalaires dans une base cartésienne ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$) s'établissent comme :

$$(\lambda + \mu) \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_l} + \mu \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l^2} + \langle \mathbf{f}_V, \mathbf{i}_k \rangle = \rho_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad 1 \leq k \leq 3$$

Par ailleurs, afin de déterminer les constantes d'intégration liées à la résolution de ces trois équations différentielles scalaires d'ordre deux, on dispose des conditions suivantes sur la frontière extérieure du domaine :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u \Omega, \quad \forall t, \quad \text{et} \quad \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{n}(\mathbf{x}) + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_S(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_\sigma \Omega, \quad \forall t$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est la partie symétrique du tenseur gradient du déplacement $\mathbf{u}$, et des conditions initiales en déplacement et vitesse (sauf dans les cadres statique et quasi-statique) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

Résumé 5.2 — Formulation en déplacement d'un problème d'élasticité. Connaissant :

- la densité volumique d'efforts $\mathbf{f}_V$ exercée en tout point de l'intérieur du domaine matériel Ω ;
- la densité surfacique d'efforts $\mathbf{f}_S$ appliquée en tout point de la partie $\partial_\sigma\Omega$ de la frontière extérieure $\partial\Omega$ du domaine;
- le déplacement $\mathbf{u}_d$ imposé en tout point de la partie complémentaire $\partial_u\Omega$ de la frontière extérieure $\partial\Omega$;

le problème pour un matériau homogène consiste à trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}$ vérifiant l'équation (dite de Navier) suivante :

$$(\lambda + \mu)\nabla_{\mathbf{x}}(\operatorname{div}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)) + \mu\Delta_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mathbf{f}_V(\mathbf{x},t) = \rho_0(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t$$

et les conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{x},t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u\Omega, \quad \forall t, \quad \text{et} \quad \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t))\mathbf{n}(\mathbf{x}) + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_S(\mathbf{x},t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_\sigma\Omega, \quad \forall t$$

ainsi que les conditions initiales :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$



Si le matériau est hétérogène, deux cas sont à envisager :

- si le domaine peut se diviser en plusieurs sous-domaines, qui sont chacun de propriétés homogènes, on peut alors appliquer l'équation de Navier séparément sur chaque sous-domaine ; dans ce cas, il faut aussi prendre en compte les conditions de raccord au niveau des interfaces entre sous-domaines, par exemple pour Ω_k et Ω_l , avec des notations évidentes :

$$\mathbf{u}^{\textcircled{k}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}^{\textcircled{l}}(\mathbf{x},t), \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^{\textcircled{k}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\textcircled{k}}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^{\textcircled{l}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\textcircled{l}}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_i, \quad \forall t$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est la normale locale à Σ_i , de sens fixé arbitrairement ;

- si ce n'est pas possible, il faut alors tenir compte des dépendances spatiales des paramètres de Lamé $(\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x}))$, d'où l'apparition de termes supplémentaires associés aux gradients spatiaux de ces paramètres.

5.2.2 Approche en contraintes

La possibilité « inverse » de l'approche précédente est de privilégier l'aspect « statique » ; en effet, dans certains cas, il est possible de proposer directement des champs de contraintes, par exemple quand on pense qu'ils doivent être homogènes, ou évoluer linéairement dans le domaine.

Stratégie de résolution en contraintes

Le point de départ est ainsi de tenter de se donner une forme *a priori* $\boldsymbol{\sigma}_{fc}$ du tenseur des contraintes, par exemple :

- en éliminant les composantes que l'on suspecte nulles ;
- en éliminant des dépendances vis-à-vis de certaines variables de l'espace, sachant que la question de la dépendance en temps est tranchée en fonction du cadre retenu : dynamique, ou (quasi-)statique ;
- en proposant des formes qui font sens sur le plan mécanique, notamment qui sont susceptibles de vérifier l'équation d'équilibre local.

Si rien ne peut être proposé, on reste alors avec la forme générique du tenseur des contraintes, qui revient à chercher, dans une base qui doit être judicieuse vis-à-vis de la géométrie du domaine, six

composantes scalaires fonctions des trois variables de l'espace.

La stratégie consiste alors à vérifier successivement les différentes équations et conditions aux limites pour pouvoir conclure si la forme proposée est la solution du problème (encore une fois grâce à la propriété d'unicité de la solution – à un mouvement de solide indéformable près, dans certains cas). Les étapes sont donc les suivantes :

1. on commence par exprimer les conditions aux limites en efforts surfaciques avec la forme retenue pour le tenseur des contraintes, ce qui permet éventuellement de la préciser encore un peu plus :

$$\boldsymbol{\sigma}_{fc} \mathbf{n} = \mathbf{f}_S \text{ sur } \partial_\sigma \Omega$$

2. on explicite l'équation d'équilibre local, soit pour la vérifier, soit pour en déduire une (des) équation(s) différentielle(s) que doivent vérifier les fonctions qui restent encore à déterminer ; par exemple, dans le cas statique, on doit vérifier :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_{fc} + \mathbf{f}_V = \mathbf{0}$$

3. on calcule le tenseur des petites déformations à l'aide de la relation de comportement en souplesse :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{fc} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{fc}$$

4. on détermine, éventuellement à l'aide de constantes d'intégration non encore connues, le champ de déplacement, par résolution de la relation liant le tenseur des petites déformations au champ de déplacement :

$$\mathbf{u}_{fc} \text{ tel que } \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{fc} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{fc})^T \right) = \boldsymbol{\varepsilon}_{fc}$$

5. on explicite les conditions aux limites en déplacement, qui permettent ainsi de déterminer les éventuelles constantes d'intégration de l'étape précédente :

$$\mathbf{u}_{fc} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_u \Omega$$

Une fois ces étapes accomplies, les mêmes situations que dans le cas de l'approche en déplacement sont envisageables :

- soit on a vérifié l'ensemble des équations et conditions aux limites : on peut alors affirmer que l'on a déterminé la solution du problème : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{fc}$, et, par conséquent, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{fc}$ et $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{fc}$;
- soit une condition aux limites (voire une équation) n'est pas vérifiée exactement : il sera peut-être possible, avec les considérations du paragraphe 5.2.3, de conclure que la forme adoptée pour la contrainte constitue une solution approchée ;
- soit on a abouti à une (des) équation(s) différentielle(s) avec condition(s) aux limites associée(s) : si l'on peut la résoudre analytiquement, on tient alors la solution du problème ; sinon, une résolution approchée, comme ce qui est proposé dans le paragraphe 5.2.3, sera peut-être envisageable.

■ Exemple 5.4 — Torsion d'un arbre cylindrique de section quelconque : approche en contraintes.

On se propose ici de résoudre par une approche en contraintes le problème de la torsion d'un arbre de section quelconque, dont on a précisé les équations et conditions aux limites dans l'exemple 5.1.

Pour cela, une forme raisonnable pour le tenseur des contraintes est de supposer qu'il ne présente que des composantes de cisaillement vis-à-vis de l'axe du cylindre ; on cherche alors :

$$\boldsymbol{\sigma}_{fc} = -2\alpha\mu(\mathbf{e} \wedge \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \psi) \otimes_S \mathbf{e}$$

où α est, comme précédemment, l'angle unitaire de torsion, et $\psi(\mathbf{x}_\Sigma) = \psi(x_1, x_2)$ est une fonction des coordonnées dans la section.

Avec cette forme, la fonction ψ vérifie automatiquement l'équation d'équilibre local ; en effet :

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}_{fc} = \left(\alpha \mu \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} - \alpha \mu \frac{\partial \psi}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

Par ailleurs, le tenseur des contraintes doit vérifier des conditions de bord libre sur les surfaces latérales Σ_l de l'arbre, soit :

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\sigma}_{fc} \mathbf{n}_l = -\alpha \mu \langle \mathbf{e} \wedge \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \psi, \mathbf{n}_l \rangle \mathbf{e}$$

En posant $\mathbf{t}_l = \mathbf{e} \wedge \mathbf{n}_l$ le vecteur tangent en tout point des surfaces latérales Σ_l , on obtient que :

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \psi, \mathbf{t}_l \rangle = 0$$

ou, autrement dit, que ψ doit être constant sur le bord de la section.

Enfin, il est maintenant fondamental de vérifier que l'on peut associer au tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_{fc}$ (lié au tenseur des contraintes) un champ de déplacement $\mathbf{u}_{fc}$; comme $\text{tr} \boldsymbol{\sigma}_{fc} = 0$, on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{fc} = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma}_{fc} = -\alpha (\mathbf{e} \wedge \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \psi) \otimes_S \mathbf{e}$$

soit, en notant u_k les composantes de $\mathbf{u}_{fc}$ dans la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 = \mathbf{e})$:

$$\begin{aligned} 0 = \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ 0 = \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ 0 = \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 2\varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ -\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 2\varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ 0 = 2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{aligned}$$

La dernière équation nous permet d'établir que :

$$\begin{aligned} 0 = 2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \\ 0 = 2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \end{aligned}$$

en vertu des deux premières équations du système. En outre, comme u_3 et ψ ne dépendent pas de x_3 , on en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que les deux premières composantes du déplacement s'écrivent comme :

$$\begin{aligned} u_1(x_2, x_3) &= a_1 x_2 x_3 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1 \\ u_2(x_1, x_3) &= a_2 x_1 x_3 + b_2 x_1 + c_2 x_3 + d_2 \end{aligned}$$

et en réutilisant la dernière équation du système, on établit alors que :

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = (a_1 + a_2)x_3 + b_1 + b_2$$

soit : $a_1 = -a_2$ et $b_1 = -b_2$.

De cette forme, on déduit une condition nécessaire sur la fonction ψ , à savoir :

$$-\alpha \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) = 2 \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} = a_2 - a_1 = 2a_2$$

ou encore, en identifiant $a_2 = \alpha$ (angle unitaire de torsion) :

$$\Delta_{\mathbf{x}_\Sigma} \psi = -2$$

Avec cette condition nécessaire, il est alors possible de montrer que l'on peut également déterminer la composante u_3 du champ de déplacement.

Afin de traiter un cas concret, considérons encore une fois, comme dans l'exemple 5.3, une section de forme elliptique pleine, de demi-axes a et b selon $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_2$ respectivement. On peut alors établir que la fonction :

$$\psi(x_1, x_2) = -\frac{b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2}{a^2 + b^2}$$

vérifie $\Delta_{\mathbf{x}_\Sigma} \psi = -2$ dans la section, et ψ constant sur le bord de cette dernière. ■



À la différence de l'approche en déplacement, il est possible que la démarche proposée ci-dessus « bloque » à l'étape 4, quand on cherche à calculer le champ de déplacement à partir de la donnée du tenseur des petites déformations. En effet, il s'agit du point délicat de cette approche, car, même si aucune condition aux limites en déplacement n'est appliquée au domaine, il est nécessaire de vérifier que le tenseur des petites déformations, qui résulte du tenseur des contraintes postulé, puisse bien s'exprimer comme la partie symétrique du tenseur gradient d'un déplacement, ce qui est l'objectif du paragraphe suivant qui établit les équations dites de compatibilité.

Équations de compatibilité

La question de savoir si, à partir d'un tenseur symétrique $\boldsymbol{\varepsilon}_{fc}$ donné, il est possible de déterminer un champ de déplacement tel que ce tenseur soit la partie symétrique de son tenseur gradient, est fondamentale dans l'approche en contraintes. Il est possible de déterminer dans le cas général quelles sont les conditions requises sur les composantes du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}_{fc}$.

Pour cela, on part de la décomposition du tenseur gradient du déplacement solution $\mathbf{u}$, présentée dans le paragraphe 1.3.3 en la somme de ses parties symétrique et antisymétrique :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} - (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right) = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

soit, en termes de composantes dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, de coordonnées associées (x_1, x_2, x_3) :

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \varepsilon_{kl} + r_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad 1 \leq k, l \leq 3$$

Nous allons nous intéresser à la partie antisymétrique $\boldsymbol{\varepsilon}$: en effet, si l'on établit les conditions nécessaires à son existence, dans ce cas $\boldsymbol{\varepsilon}$ est effectivement la partie symétrique du gradient d'un déplacement. On commence par exprimer les dérivées partielles de cette partie antisymétrique en fonction des dérivées du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial r_{kl}}{\partial x_m} &= \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m} \\ &= \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_m} + \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} \right) - \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} \right) - \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_m \partial x_k} \right) \\ &= 2 \frac{\partial \varepsilon_{km}}{\partial x_l} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial x_k} \end{aligned}$$

vu que les dérivées secondes croisées des composantes de $\mathbf{u}$ doivent être égales en vertu du théorème de Schwarz. Pour qu'il soit possible de remonter aux composantes r_{kl} de $\mathbb{r}$, il est nécessaire (et suffisant) que ses dérivées secondes vérifient le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 r_{kl}}{\partial x_m \partial x_n} = \frac{\partial^2 r_{kl}}{\partial x_n \partial x_m}, \quad 1 \leq k, l, m, n \leq 3$$

soit finalement :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_l \partial x_n} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{lm}}{\partial x_k \partial x_n} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{kn}}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ln}}{\partial x_k \partial x_m}, \quad 1 \leq k, l, m, n \leq 3$$

qui constituent six équations scalaires indépendantes, dites de compatibilité, qui garantissent de trouver un champ de déplacement associé au tenseur ε : en effet, dans ce cas, maintenant que l'on a pu déterminer $\mathbb{r}$, il suffit d'écrire que :

$$\mathbb{D}_x \mathbf{u} = \varepsilon + \mathbb{r}$$

équation qui est intégrable compte tenu de la référence au théorème de Schwarz. En outre, la démarche que l'on vient d'exposer a l'avantage d'être constructive, vu qu'elle donne toutes les étapes permettant de remonter au champ de déplacement à partir du tenseur ε .

R Une autre façon d'établir ces équations est d'utiliser la notion de rotationnel d'un tenseur $\mathbb{r} \otimes \mathbb{A}$, précisée dans l'annexe B.1.1, et dont on rappelle ici qu'il s'agit de l'application linéaire qui, à un vecteur $\mathbf{c}$ constant, associe :

$$(\mathbb{r} \otimes \mathbb{A}) \mathbf{c} = \mathbf{rot}_x (\mathbb{A}^T \mathbf{c})$$

où $\mathbf{rot}_x \mathbf{v}$ est le rotationnel d'un vecteur $\mathbf{v}$.

En effet, en prenant le rotationnel de la définition du tenseur des petites déformations, on obtient :

$$2\mathbb{r} \otimes \mathbb{A} \varepsilon = \mathbb{r} \otimes \mathbb{A} (\mathbb{D}_x \mathbf{u}) + \mathbb{r} \otimes \mathbb{A} ((\mathbb{D}_x \mathbf{u})^T) = \mathbf{0} + \mathbb{D}_x (\mathbf{rot}_x \mathbf{u})$$

d'où, en appliquant le rotationnel une deuxième fois :

$$\mathbb{r} \otimes \mathbb{A} (\mathbb{r} \otimes \mathbb{A} \varepsilon) = \mathbf{0}$$

Ce tenseur étant symétrique, six relations scalaires indépendantes peuvent être obtenues en écrivant ses composantes dans une base, qui sont les équations de compatibilité que nous avons déterminées plus haut. Plus de précisions sont données dans [Bou87 ; Sal05].

Il est intéressant de voir le parallèle entre cette conclusion, et un résultat semblable, concernant les vecteurs : un champ de vecteur $\mathbf{z}$ donné peut s'écrire comme le gradient d'une fonction scalaire (à déterminer) si et seulement si son rotationnel est nul : $\mathbf{rot}_x \mathbf{z} = \mathbf{0}$.

■ **Exemple 5.5 — Compatibilité d'un champ de déformation thermique.** On souhaite étudier ici pour quelles conditions sur le champ de variation de température $\Delta T = \Theta(\mathbf{x})$ le champ de déformation associé ($\varepsilon^{th} = \alpha \Theta(\mathbf{x}) \mathbb{I}$) est compatible avec un champ de déplacement (avec α , coefficient de dilatation thermique, supposé uniforme) ; on met alors en place la démarche présentée ci-dessus.

En se plaçant dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, de coordonnées associées (x_1, x_2, x_3) , on peut expliciter les neuf équations scalaires de compatibilité :

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{21}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_1} = -\alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1^2} \\ -\alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{21}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_1} = 0 \\ 0 &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{32}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2 \partial x_2} = -\alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{21}}{\partial x_3 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \\
-\alpha \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x_3 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{32}}{\partial x_1 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \\
0 &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{32}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_3 \partial x_2} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1 \partial x_2} \\
\alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3 \partial x_3} = -\alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_3^2}
\end{aligned}$$

dont six sont réellement indépendantes. On déduit des équations (1), (5) et (9) que :

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_3^2} = 0$$

puis, à l'aide des autres équations que :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_1} = C_1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} = C_2, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} = C_3$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes. On en conclut alors que le champ de variation de température doit vérifier :

$$\Theta(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{C}, \mathbf{x} \rangle + D$$

où $\mathbf{C}$ est le vecteur de composantes (C_1, C_2, C_3) constantes et D est une constante.

Si cette condition est remplie pour le champ de variation de température, le champ de déplacement se détermine en suivant les étapes de la démarche :

1. on calcule les dérivées partielles des composantes de $\mathbf{r}$, que l'on exprime en fonction des dérivées des composantes de ε :

$$\frac{\partial r_{kl}}{\partial x_m} = \frac{\partial \varepsilon_{km}}{\partial x_l} - \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial x_k}, \quad 1 \leq k, l, m \leq 3$$

2. on intègre les relations précédentes pour déterminer les composantes de $\mathbf{r}$;
3. on déduit des composantes de $\mathbf{r}$ les expressions des dérivées partielles du champ de déplacement :

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \varepsilon_{kl} + r_{kl}, \quad 1 \leq k, l \leq 3$$

4. on intègre les relations précédentes pour déterminer le champ de déplacement, pour lequel on trouve finalement comme composantes dans $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, :

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{C_1}{2}(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + C_2 x_1 x_2 + C_3 x_1 x_3 + D x_1 + a_1 - b_3 x_2 + b_2 x_3 \\
u_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{C_2}{2}(x_2^2 - x_1^2 - x_3^2) + C_1 x_1 x_2 + C_3 x_2 x_3 + D x_2 + a_2 - b_1 x_3 + b_3 x_1 \\
u_3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{C_3}{2}(x_3^2 - x_1^2 - x_2^2) + C_2 x_2 x_3 + C_1 x_1 x_3 + D x_3 + a_3 - b_2 x_1 + b_1 x_2
\end{aligned}$$

où (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) sont les composantes de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ constants, qui traduisent un mouvement de solide indéformable arbitraire, constitué d'une translation et d'une (petite) rotation $(\mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{x})$.

Par conséquent, si le champ de variation de température est affine, il est possible de lui associer un champ de déplacement (celui que nous venons de calculer), ce qui signifie que, s'il n'y pas d'entrave à ce déplacement, les déformations associées peuvent se faire librement, et aucune contrainte n'est créée dans le domaine, vu que l'on a :

$$\frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right) = \boldsymbol{\varepsilon}^t = \boldsymbol{\varepsilon}^{th}$$

En revanche, si la variation de température n'a pas cette propriété, des contraintes apparaissent conjointement à des déformations élastiques de façon à ce qu'il puisse y avoir effectivement un champ de déplacement associé tel que :

$$\frac{1}{2} \left(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right) = \boldsymbol{\varepsilon}^t = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{th}$$

■

Résumé 5.3 — Équations de compatibilité. Les conditions nécessaires pour qu'un tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ soit effectivement la partie symétrique du tenseur gradient d'un déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ s'écrivent comme les six équations scalaires suivantes :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_l \partial x_n} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{lm}}{\partial x_k \partial x_n} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{kn}}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ln}}{\partial x_k \partial x_m}, \quad 1 \leq k, l, m, n \leq 3$$

qui s'expriment dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, de coordonnées associées (x_1, x_2, x_3) .

R Dans le cas où l'on ne fait aucune hypothèse sur le champ de contraintes recherché, les équations de compatibilité, dans lesquelles on injecte la relation de comportement exprimée en souplesse, et que l'on combine avec l'équation d'équilibre local, permettent d'aboutir à des relations que doit vérifier le tenseur des contraintes pour qu'il puisse être solution ; il s'agit des équations dites de Beltrami qui, dans le cadre statique, et en présence d'un matériau homogène, s'écrivent comme :

$$\frac{1}{1+\nu} \mathbb{D}_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}}(\text{tr} \boldsymbol{\sigma})) + \Delta_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_V) \mathbb{I} + \mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_V + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_V)^T = 0$$

où $\Delta_{\mathbf{x}}$ est le laplacien (tensoriel), qui, dans une base cartésienne, est le tenseur de composantes égales aux laplaciens des composantes du tenseur d'origine.

Comme cette équation est tensorielle symétrique, elle peut donner six relations scalaires indépendantes ; dans le cas usuel de densités volumiques d'efforts qui sont uniformes, on établit que le tenseur des contraintes doit alors vérifier :

$$\Delta_{\mathbf{x}} \Delta_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = 0$$

En pratique, ces équations sont peu utilisées. Plus de précisions peuvent être trouvées dans [Sad14 ; Sal07].

5.2.3 Résolutions approchées

Dans la plupart des cas rencontrés, il n'est pas possible de trouver des champs vérifiant l'ensemble des équations du problème : il existe en effet peu de solutions analytiques, et ces dernières sont souvent associées à des cas de charge et des géométries très basiques. Il est alors nécessaire de mettre en place des alternatives permettant d'obtenir des solutions approchées.

Principe de Saint-Venant

Nous avons déjà eu l'occasion de constater les implications de ce principe dans le paragraphe 3.1.1 qui présentait les détails d'un essai de traction simple : quelle que soit la façon de solliciter l'éprouvette à ses deux extrémités, l'hypothèse d'une contrainte uniaxiale et homogène peut être adoptée dès lors que l'on est « suffisamment loin » de ces extrémités, à condition que ces sollicitations soient, sur chaque extrémité, de résultante de direction l'axe $\mathbf{e}$ de l'éprouvette, et de moment nul en un point de l'axe de symétrie de l'éprouvette. En pratique, on constate, à l'aide des simulations numériques présentées sur la figure 3.3 (page 71) par exemple, que l'ensemble de la zone utile de l'éprouvette présente effectivement une telle contrainte : $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ee} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$.

Principe de Saint-Venant. Ce principe peut s'énoncer qualitativement comme suit.

Si l'on remplace, sur une frontière de « petite » aire, les conditions en efforts surfaciques connus par des conditions localement différentes, mais ayant une résultante et un moment identiques, les deux solutions en contraintes diffèrent peu, « loin » de cette frontière.

Tout se passe comme si le domaine matériel considéré ne réagissait qu'à la donnée globale de la résultante et du moment sur chaque surface d'application d'efforts, comme représenté schématiquement sur la figure 5.2 où l'on a défini :

$$\mathbf{R} = \int_{\Sigma} \mathbf{f}_S dS_x, \text{ et } \mathbf{M}_{\mathbf{x}_O} = \int_{\Sigma} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \wedge \mathbf{f}_S dS_x$$

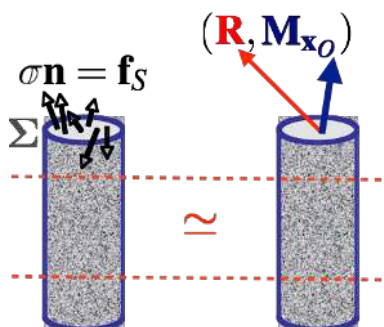
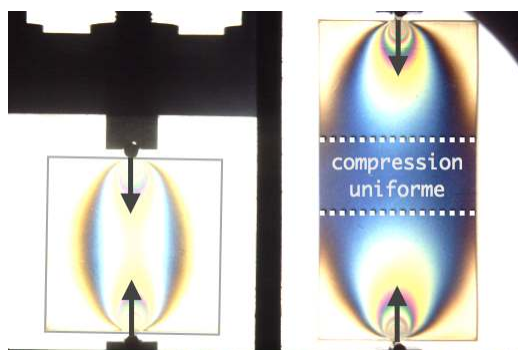


FIGURE 5.2 – Illustration du principe de Saint-Venant.

Ce résultat est utile dès lors que l'on va chercher des solutions approchées au problème traité, vu qu'il dispense de vérifier localement toutes les conditions en efforts surfaciques sur la frontière : ainsi, on dispose d'un moyen pratique pour « simplifier » certaines données du problème, et aboutir à des solutions analytiques valides sur une très grande proportion du domaine.

R Nous nous sommes volontairement limités à un énoncé qualitatif du principe de Saint-Venant. Il est bien sûr possible d'en avoir une version mathématique plus précise, qui décrit les deux solutions comme asymptotiquement équivalentes, et précise donc le sens des mots « petite » et « loin » dans l'énoncé précédent. La figure ci-dessous permet de se rendre compte de la taille de la zone d'influence dans le cas d'un essai de compression, où deux élongements d'éprouvettes sont comparés par photoélasticité.



On distingue aisément la zone de compression uniforme dans l'éprouvette de droite, tandis que celle de gauche est trop courte pour que le principe de Saint-Venant puisse s'appliquer.

■ Exemple 5.6 — Torsion d'un arbre cylindrique de section quelconque : principe de Saint-Venant.

Ce cas correspond en fait à l'origine historique du principe, qui a été énoncé par Saint-Venant à la suite de son *Mémoire sur la torsion des prismes*, dans le *Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines* (1864) :

Mais cette double et longue attente n'est pas nécessaire avant de résoudre les questions de pratique, qui n'exigent que des approximations. Nous l'avons souvent dit : des faits suffisamment nombreux montrent le peu d'influence du mode de répartition et d'application, et permettent d'employer les formules soit anciennes soit nouvelles d'extension, torsion, flexion, pour des forces quelconques agissant aux extrémités de prismes très-longs par rapport à leurs dimensions transversales en n'ayant égard qu'aux grandeurs de leurs résultantes et de leurs moments résultants. D'où il suit qu'il suffit de donner des démonstrations exactes des formules relativement à un cas ou à un mode particulier d'action des forces aux extrémités, pour que la théorie soit établie et qu'on puisse faire l'application de ses résultats aux divers autres cas qui peuvent s'offrir.

Ces observations permettent de justifier pourquoi, dans l'exemple 5.1, on a fait le choix « pragmatique » de n'imposer, comme conditions aux limites sur les extrémités de l'arbre, que les résultantes et les moments exercés par la machine d'essai. En effet, à part au voisinage des extrémités, la façon dont le couple de torsion est appliqué par la machine n'a aucune influence sur les champs solutions du problème de torsion, à condition que la résultante et les

deux autres composantes du moment, associées aux efforts de liaison, soient effectivement nulles.

Ainsi, si l'on reprend l'approche en déplacement proposée dans l'exemple 5.3, la solution obtenue est valide dès lors que l'on s'éloigne des extrémités de l'arbre, vu que :

$$\mathbf{R}^O = \mathbf{0} = \mathbf{R}^H$$

et :

$$\langle \mathbf{M}^O, \mathbf{i}_1 \rangle = 0 = \langle \mathbf{M}^O, \mathbf{i}_2 \rangle, \text{ et } \langle \mathbf{M}^H, \mathbf{i}_1 \rangle = 0 = \langle \mathbf{M}^H, \mathbf{i}_2 \rangle$$

Le couple de torsion s'exprime alors comme :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{M}^H, \mathbf{e} \rangle &= \int_{\Sigma_H} \langle \mathbf{x}_\Sigma \wedge (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}), \mathbf{e} \rangle dS_x = \int_{\Sigma_H} \alpha \mu \langle \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi + \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma \rangle dS_x \\ &= \int_{\Sigma_H} \alpha \mu \|\mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma\|^2 dS_x + \int_{\Sigma_H} \alpha \mu \langle \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi, \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma \rangle dS_x \\ &= \alpha \mu \int_{\Sigma_H} \|\mathbf{x}_\Sigma\|^2 dS_x + \alpha \mu \left\langle \mathbf{e}, \int_{\Sigma_H} \mathbf{x}_\Sigma \wedge \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi dS_x \right\rangle \\ &= \alpha \mu I_e + \alpha \mu \left\langle \mathbf{e}, \int_{\Sigma_H} \mathbf{x}_\Sigma \wedge \nabla_{\mathbf{x}_\Sigma} \varphi dS_x \right\rangle \end{aligned}$$

où $I_e = \int_{\Sigma_H} \|\mathbf{x}_\Sigma\|^2 dS_x$ est l'« inertie polaire de section », que l'on évoquera en mécanique des poutres, dans le paragraphe 6.3.3.

Il est alors possible de montrer que, quelle que soit la géométrie de la section, la seconde intégrale est toujours négative, ce qui permet de conclure que :

$$\frac{\langle \mathbf{M}^H, \mathbf{e} \rangle}{\alpha} = \mu J < \mu I_e$$

c'est-à-dire que le phénomène de gauchissement diminue la rigidité à la torsion de l'arbre. ■

Vers des résolutions numériques...

Une autre possibilité pour obtenir des solutions approchées est de les chercher sur des bases (fonctionnelles) de dimension réduite ; en effet, imaginons que, dans le cas d'un problème à une dimension, on se donne comme forme approchée pour le déplacement sa représentation dans la base des monômes de la variable d'espace, tronquée à partir d'un certain rang N :

$$u_h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k x^k \approx \sum_{k=1}^N U_k x^k$$

On a ainsi discrétisé le problème sur le plan spatial, ce qui permet d'envisager une résolution sur le plan numérique : la méthode classiquement utilisée en mécanique (comme dans toute discipline requérant la résolution d'équations aux dérivées partielles) est la méthode des éléments finis, dont le cadre dépasse ce cours, mais dont quelques éléments sont donnés dans l'exemple suivant. Plus de précisions peuvent, par exemple, être trouvées dans [BS97 ; BW97 ; BF07 ; Sad14].

■ **Exemple 5.7 — Illustration de la méthode des éléments finis.** Pour illustrer les grands principes de la méthode, on prend l'exemple d'un barrage poids soumis à la pression hydrostatique de l'eau, dont les équations sont résumées sur la figure 5.1. La géométrie simplifiée de ce barrage consiste, avec une hypothèse de problème plan, en un triangle rectangle isocèle de petit côté L .

La base de la méthode des éléments finis consiste à discrétiser la géométrie : on introduit un certain nombre de points, ou « nœuds », qui permettent de réaliser une partition de la géométrie en divers triangles, que l'on appelle « éléments » (il serait aussi possible d'avoir des quadrilatères). Sur chaque élément, on propose une interpolation polynomiale du champ de déplacement, que l'on cherche ainsi sous forme approchée.

Afin de simplifier l'exposé, imaginons que la géométrie du barrage n'est discrétisée qu'en trois nœuds, qui sont les sommets du triangle ; il n'y a donc qu'un élément associé : le barrage lui-même. On choisit alors d'interpoler le déplacement approché de façon linéaire sur ce triangle, en choisissant des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) dont

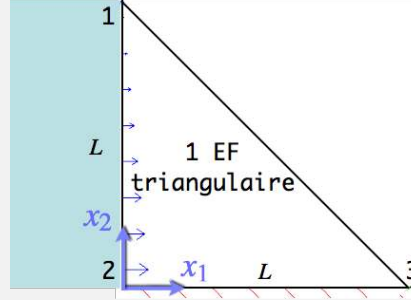
l'origine est prise au niveau du sommet en bas à gauche, et en écrivant que :

$$\mathbf{u}_h(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^3 N_k(x_1, x_2) \mathbf{U}_k$$

où les fonctions N_k sont appelées « fonctions de forme », linéaires ici :

$$N_1(x_1, x_2) = \frac{x_2}{L}, \quad N_2(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1}{L} - \frac{x_2}{L}, \quad N_3(x_1, x_2) = \frac{x_1}{L}$$

et les vecteurs $\mathbf{U}_k$ contiennent les composantes des déplacements des nœuds 1, 2 et 3, mentionnés ci-dessous. On note alors $\mathbf{U}$ le vecteur de dimension 6×1 contenant toutes ces composantes.



Avec cette interpolation, il est possible d'exprimer les tenseurs des petites déformations et des contraintes sous forme matricielle, en utilisant la notation de Voigt introduite dans le paragraphe 4.1.3 :

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{B}\mathbf{U}, \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}\mathbb{B}\mathbf{U}$$

ce qui permet d'estimer l'énergie de déformation élastique comme :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle dV_x = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{U}^T \mathbb{B}^T \mathbb{C} \mathbb{B} \mathbf{U} dV_x$$

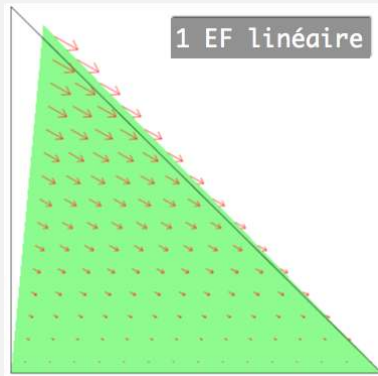
De même, on peut estimer les travaux des densités d'efforts comme :

$$\mathcal{W} = \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}_V, \mathbf{u}_h \rangle dV_x + \int_{\Sigma} \langle \mathbf{f}_S, \mathbf{u}_h \rangle dS_x = \int_{\Omega} \mathbf{U}^T \mathbf{F}_V dV_x + \int_{\Sigma} \mathbf{U}^T \mathbf{F}_S dS_x$$

où Σ est la surface soumise à la pression de l'eau. Compte tenu des conditions limites en déplacement, les nœuds 2 et 3 sont fixes, et il est alors possible de montrer que la solution éléments finis consiste à résoudre le système matriciel suivant :

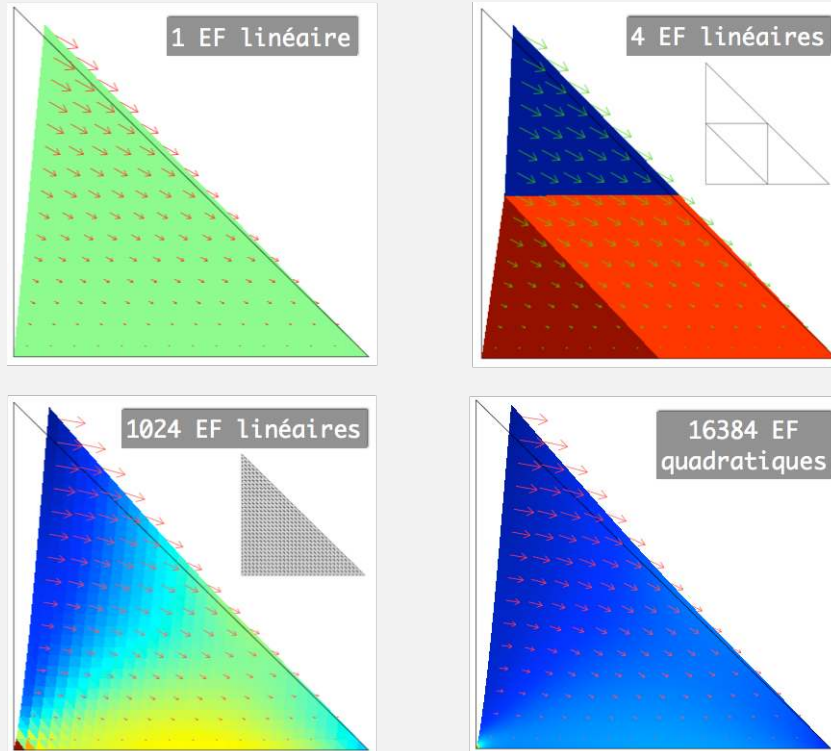
$$\left(\int_{\Omega} \mathbb{B}^T \mathbb{C} \mathbb{B} dV_x \right) \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{i}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{i}_2 \rangle \end{pmatrix} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_V dV_x + \int_{\Sigma} \mathbf{F}_S dS_x$$

où les différentes matrices sont réduites aux indices correspondant aux deux composantes du déplacement du nœud 1. On obtient alors la solution ci-dessous (les flèches représentent le déplacement, tandis que les couleurs concernent la première contrainte principale).



On constate aisément que le déplacement évolue linéairement dans l'élément, tandis que la contrainte est constante.

Une propriété fondamentale de la méthode des éléments finis est que cette dernière converge vers la solution exacte du problème lorsque le nombre d'éléments tend vers l'infini ; pour cela, il faut alors « assembler » les matrices présentées ci-dessus afin de considérer un système matriciel de plus grande taille. On observe ce phénomène de convergence sur les figures ci-dessous.



Il est également possible d'augmenter l'ordre de l'interpolation proposée pour le déplacement, comme ce qui est illustré par la dernière figure avec 16 384 éléments, et où l'interpolation est quadratique. ■

5.3 Simplifications d'un problème d'élasticité

Dans certains cas, il est possible de « simplifier » les équations et/ou les conditions aux limites établies dans les paragraphes 5.1.1 et 5.1.2, de façon à considérer un problème plus simple, mais encore proche (voire équivalent) du problème initial. Ces simplifications peuvent se faire de différentes manières.

5.3.1 Principe de superposition

Une première possibilité consiste à décomposer le problème initial en plusieurs problèmes plus simples : en effet, compte tenu de la linéarité de l'ensemble des équations que nous avons détaillées dans les paragraphes 5.1.1 et 5.1.2, il est possible de déterminer la solution comme une combinaison linéaire des solutions de problèmes élémentaires.

Si l'on considère, comme illustration, le cas (représenté sur la figure 5.3) d'un bâtiment soumis à l'action conjuguée du vent et de la neige accumulée sur son toit, il est possible de décomposer le problème de la façon suivante :

1. un problème où le bâtiment n'est soumis qu'à l'action du vent, et pour lequel on détermine comme solution un champ de déplacement $\mathbf{u}^v$, et un tenseur des contraintes σ^v ;
2. un problème où le bâtiment n'est soumis qu'à l'action de la neige, et pour lequel on détermine comme solution un champ de déplacement $\mathbf{u}^n$, et un tenseur des contraintes σ^n .

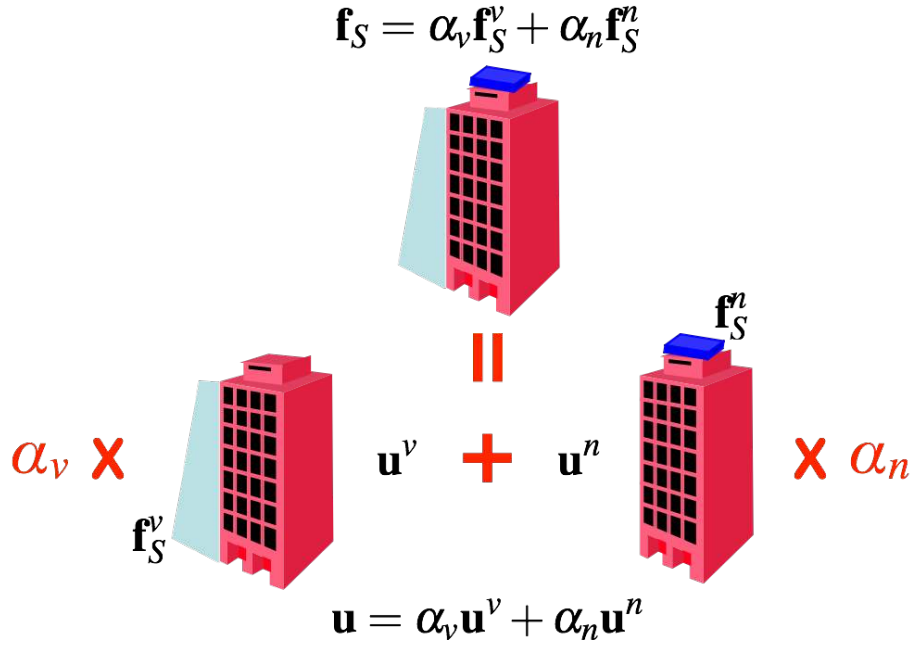


FIGURE 5.3 – Illustration du principe de superposition.

La solution du problème initial s'écrit alors comme la somme des solutions des deux problèmes élémentaires :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^v + \mathbf{u}^n, \text{ et } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^v + \boldsymbol{\sigma}^n$$

Il est de plus possible d'envisager d'autres cas de figure dès lors que l'on connaît les solutions élémentaires : ainsi, si l'on s'intéresse maintenant au bâtiment soumis à deux fois plus de neige, et à moitié moins de vent, la solution associée s'écrit simplement comme :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^v}{2} + 2\mathbf{u}^n, \text{ et } \boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^v}{2} + 2\boldsymbol{\sigma}^n$$

Le principe de superposition concerne ainsi toute combinaison linéaire de problèmes élémentaires, comme résumé sur la figure 5.3.

L'intérêt de ce principe de superposition concerne avant tout les résolutions analytiques, puisque la connaissance de solutions à des problèmes élémentaires, éventuellement tabulées, permet de résoudre des problèmes présentant des chargements et des conditions limites complexes. C'est aussi grâce à ce principe que l'on peut vérifier si l'action de la pesanteur peut être négligée, vu que l'on peut directement comparer la solution élémentaire associée à cette dernière avec celle qui n'en tient pas compte.

R Les problèmes de thermoélasticité peuvent aussi bénéficier de ce principe : il est en effet possible de traiter séparément le chargement mécanique du chargement thermique, en considérant, par exemple pour ce qui concerne l'équation d'équilibre local dans laquelle on a injecté la relation de comportement, d'une part :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^m) + \mathbf{f}_V = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^m, \text{ avec } \boldsymbol{\varepsilon}^m = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^m + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^m)^T)$$

et, d'autre part :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}^e - \alpha \Delta T \mathbb{I})) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^{th}, \text{ avec } \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{th} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{th})^T)$$

La solution du problème thermoélastique s'écrit donc simplement comme : $\mathbf{u} = \mathbf{u}^m + \mathbf{u}^{th}$.

Ainsi, le champ de déplacement obtenu dans le cas de la dilatation thermique entravée d'un barreau, étudiée dans la deuxième partie de l'exemple 4.2, peut s'obtenir comme la somme du déplacement

correspondant à la dilatation libre de ce barreau, développée dans la première partie de ce même exemple :

$$\mathbf{u}^{th}(\mathbf{x}) = (\alpha\Delta T)(r\mathbf{i}_r(\theta) + z\mathbf{i}_z)$$

et du déplacement obtenu dans le cas de la compression d'un barreau soumis à une pression p_0 , traitée dans l'exemple 4.1 :

$$\mathbf{u}^m(\mathbf{x}) = \frac{p_0}{E}(vr\mathbf{i}_r(\theta) - z\mathbf{i}_z)$$

Cette pression p_0 est en outre déterminée en exprimant l'impossibilité pour le barreau de s'allonger :

$$\langle \mathbf{u}^m(z=H) + \mathbf{u}^{th}(z=H), \mathbf{i}_z \rangle = 0$$

ce qui implique que $p_0 = E(\alpha\Delta T)$, et donc que le champ de déplacement recherché est finalement :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (1 + \nu)(\alpha\Delta T)r\mathbf{i}_r(\theta)$$

5.3.2 Élasticité plane

Dans certains cas spécifiques que nous allons décrire ici, il est possible de réduire le problème, initialement tridimensionnel, à son étude dans un plan particulier, ce qui permet ainsi de diminuer le nombre de composantes inconnues et de variables à considérer.

Déformations planes

Cette hypothèse est couramment mise en place quand on considère un domaine dont la géométrie est invariante dans une direction (selon laquelle il est, de plus, de grande dimension), et qui n'est sollicité que dans le plan perpendiculaire à cette direction (plan que l'on qualifiera alors de section). Cette hypothèse est d'autant plus valide si le déplacement hors plan est contraint à s'annuler sur les deux sections extrêmes (comme dans le cas d'un domaine compris entre deux massifs indéformables) ; dans le cas contraire, adopter cette hypothèse revient à considérer que le déplacement hors plan peut tout de même être négligé, et que l'étude peut se limiter à une section du domaine choisie arbitrairement.

Hypothèse de déformations planes. Cette hypothèse implique que, vis-à-vis d'un plan (Π) dont on considère une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$, on suppose que le champ de déplacement est dans le plan (Π), et ne dépend que des deux coordonnées (x_1, x_2) associées à la base du plan :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2)\mathbf{i}_1 + u_2(x_1, x_2)\mathbf{i}_2$$

Il est donc indépendant de la coordonnée x_3 associée à $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2$.

Par conséquent, le tenseur des petites déformations est lui aussi indépendant de x_3 , et, compte tenu de la forme du champ de déplacement, vérifie $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{i}_3 = \mathbf{0}$, comme on peut le constater à l'aide de son expression dans la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2)}$$

Le tenseur des contraintes associé s'obtient alors en appliquant la relation de comportement en rigidité :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$

où les paramètres de Lamé λ et μ peuvent dépendre de x_1 et x_2 , et s'expriment en fonction du module de Young et du coefficient de Poisson comme dans le cas tridimensionnel :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Dans la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2)$, le tenseur des contraintes s'écrit donc comme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2)}$$

L'équation d'équilibre local devient alors une équation vectorielle à deux composantes, vu que l'on reste dans le plan (Π) ; en coordonnées cartésiennes, on doit alors vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \langle \mathbf{f}_V, \mathbf{i}_1 \rangle &= \rho_0 \ddot{u}_1 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \langle \mathbf{f}_V, \mathbf{i}_2 \rangle &= \rho_0 \ddot{u}_2 \end{aligned}$$



Comme attendu, le tenseur des contraintes ne dépend que de (x_1, x_2) ; en revanche, il n'est pas plan, vu qu'il existe une composante hors plan non nulle *a priori* :

$$\sigma_{33}(x_1, x_2) = \lambda (\varepsilon_{11}(x_1, x_2) + \varepsilon_{22}(x_1, x_2)) = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right) \neq 0$$



Même si l'hypothèse de déformation plane est, par nature, cinématique, il est possible d'adopter une approche en contraintes pour résoudre le problème. Dans ce cas, le tenseur des contraintes doit vérifier un certain nombre de conditions *a priori*.

Tout d'abord, il doit, comme plus haut, vérifier $\mathbf{i}_3 \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{i}_3 = \mathbf{0}$. En outre, σ_{33} ne peut pas être arbitraire, vu qu'il a été établi que, nécessairement :

$$\sigma_{33} = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Enfin, pour pouvoir être solution, il faut qu'il vérifie les équations de Beltrami, évoquées dans le paragraphe 5.2.2, et qui, dans le cadre statique, et pour un matériau homogène, se réduisent tout simplement ici à la relation scalaire suivante :

$$(1 - \nu) \Delta_{\mathbf{x}} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_V = 0$$

Par ailleurs, la relation de comportement en souplesse s'écrit, en termes de composantes, comme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_{11} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{22} \right) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_{22} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{11} \right) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} \end{aligned}$$

Contraintes planes

Cette hypothèse est couramment adoptée quand on considère un domaine dont la géométrie est invariante dans une direction selon laquelle il est de faible épaisseur, et s'il n'est sollicité que dans le plan perpendiculaire à cette direction. Elle est d'autant plus valide si les deux sections extrêmes sont des bords libres ; dans le cas contraire, adopter cette hypothèse revient à considérer que la section est suffisamment fine pour que l'on puisse négliger les contraintes qui ne sont pas dans le plan de la section, et que l'étude peut se limiter à une section du domaine choisie arbitrairement.

Hypothèse de contraintes planes. Cette hypothèse implique que, vis-à-vis d'un plan (Π) dont on considère une base cartésienne ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$), on suppose que le tenseur des contraintes est plan (il vérifie $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{i}_3 = \mathbf{0}$) et ne dépend que des deux coordonnées (x_1, x_2) associées à la base du plan :

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2) = \sigma_{11}(x_1, x_2)\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \sigma_{22}(x_1, x_2)\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + 2\sigma_{12}(x_1, x_2)\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2$$

Il est donc notamment indépendant de la coordonnée x_3 associée à $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2$.

L'équation d'équilibre local devient alors une équation vectorielle à deux composantes, vu que l'on reste dans le plan (Π) ; en coordonnées cartésiennes, et dans le cadre statique, on doit alors vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \langle \mathbf{f}_V, \mathbf{i}_1 \rangle &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \langle \mathbf{f}_V, \mathbf{i}_2 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Le tenseur des déformations associé s'obtient alors en appliquant la relation de comportement en souplesse :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbb{I}$$

soit, dans la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} & \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} & 0 \\ \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} & \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2)}$$



Comme attendu, le tenseur des déformations ne dépend que de (x_1, x_2) ; en revanche, il n'est pas plan, vu qu'il existe une composante hors plan non nulle *a priori* :

$$\varepsilon_{33}(x_1, x_2) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}(x_1, x_2) + \sigma_{22}(x_1, x_2)) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}(x_1, x_2) + \varepsilon_{22}(x_1, x_2)) \neq 0$$

La relation en souplesse peut naturellement s'inverser, pour impliquer que, en termes de composantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \end{aligned}$$

ou, directement, pour les parties planes $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ des tenseurs des contraintes et des déformations :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}(\text{tr}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})\mathbb{I}_2 + \frac{E}{1+\nu}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$



La forme précédente est très proche de la loi de Hooke tridimensionnelle, si ce n'est qu'il faut remplacer le paramètre λ par :

$$\lambda_{CP} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \neq \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda$$

Compte tenu de la forme du tenseur des petites déformations, les équations de compatibilité, abordées dans le paragraphe 5.2.2, impliquent nécessairement que :

$$\varepsilon_{33}(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3$$

où c_1 , c_2 et c_3 sont des constantes. En outre, les équations de Beltrami, donnant les conditions nécessaires pour que σ puisse être solution, impliquent que l'on doit avoir, dans le cadre statique :

$$\Delta_{\mathbf{x}}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (1 + \nu) \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_V = 0$$

R Dans le cas où la densité d'efforts volumiques est uniforme sur le domaine, on peut résoudre les équations en introduisant ce que l'on appelle une fonction de contrainte Φ , ou encore fonction d'Airy, telle que, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \langle \mathbf{f}_V, \mathbf{i}_1 \rangle x_1 \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \langle \mathbf{f}_V, \mathbf{i}_2 \rangle x_2 \\ \sigma_{12} &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}\end{aligned}$$

En effet, avec ce choix, l'équation d'équilibre local est automatiquement vérifiée. En outre, les équations de Beltrami impliquent que, nécessairement :

$$0 = \Delta_{\mathbf{x}}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \Delta_{\mathbf{x}} \Delta_{\mathbf{x}} \Phi$$

Plus de précisions peuvent être trouvées dans [Sad14 ; Sal07].

Axisymétrie

Dans le cas de géométries de révolution, il est possible d'envisager certaines simplifications ; si l'on introduit les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base $(\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_z)$ associées à la géométrie considérée, deux cas peuvent être adoptés :

- si le chargement et les conditions en déplacements imposés sont axisymétriques, c'est-à-dire indépendants de l'angle θ , et, de plus, sans composante orthoradiale, les composantes du déplacement et des contraintes ne dépendent pas de θ , et la solution peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= u_r(r, z) \mathbf{i}_r(\theta) + u_z(r, z) \mathbf{i}_z \\ \sigma(\mathbf{x}) &= \sigma_{rr}(r, z) \mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_r(\theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, z) \mathbf{i}_\theta \otimes \mathbf{i}_\theta + \sigma_{zz}(r, z) \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z + 2\sigma_{rz}(r, z) \mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_z\end{aligned}$$

ce qui signifie que le problème peut être résolu dans un plan passant par l'axe du cylindre, de coordonnées (r, z) ;



On prendra garde que, même sans dépendance explicite en θ , une composante orthoradiale subsiste *a priori* dans le tenseur des petites déformations, s'exprimant comme :

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r, z) = \frac{u_r(r, z)}{r}$$

ainsi que, par conséquent, dans le tenseur des contraintes :

$$\sigma_{\theta\theta}(r, z) = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r(r, z)}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}(r, z) + \frac{\partial u_z}{\partial z}(r, z) \right)$$

- si le chargement et les conditions en déplacement imposés sont indépendants de z , et perpendiculaires à l'axe d'axisymétrie, dans ce cas, on peut envisager une hypothèse de déformations planes, ou bien de contraintes planes, dans le plan de coordonnées (r, θ) .

- R** Dans le cas d'un domaine à symétrie sphérique, si le chargement et les conditions en déplacements imposés sont radiaux, et indépendants des angles ϑ et ϕ associés à la base sphérique $(\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi), \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi), \mathbf{e}_\phi(\phi))$, on peut alors chercher une solution en déplacement et contraintes indépendante de ϑ et ϕ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_r(r)\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sigma_{rr}(r)\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) + \sigma_{\vartheta\vartheta}(r)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) + \sigma_{\phi\phi}(r)\mathbf{e}_\phi(\phi) \otimes \mathbf{e}_\phi(\phi)$$

ce qui signifie que le problème se résout selon un rayon. Par ailleurs, on prendra garde que, même sans dépendance explicite en ϑ et ϕ , il existe a priori des composantes non radiales dans le tenseur des petites déformations :

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta}(r) = \frac{u_r(r)}{r} = \varepsilon_{\phi\phi}(r)$$

Résumé 5.4 — Élasticité plane. Trois cadres permettent de passer du problème initial, tridimensionnel, à un problème à deux dimensions seulement.

1. hypothèse de déformations planes dans un plan de coordonnées (x_1, x_2) associées à une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, t) = u_1(x_1, x_2, t)\mathbf{i}_1 + u_2(x_1, x_2, t)\mathbf{i}_2$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2, t)(\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, t) = \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2, t)) \mathbb{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2, t)$$

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, t) = \lambda (\varepsilon_{11}(x_1, x_2, t) + \varepsilon_{22}(x_1, x_2, t)) = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, t) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, t) \right) \neq 0$$

2. hypothèse de contraintes planes dans un plan de coordonnées (x_1, x_2) associées à une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$:

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, t)(\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2, t) = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, t) - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, t)) \mathbb{I}$$

$$\varepsilon_{33}(x_1, x_2, t) = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11}(x_1, x_2, t) + \sigma_{22}(x_1, x_2, t)) = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11}(x_1, x_2, t) + \varepsilon_{22}(x_1, x_2, t)) \neq 0$$

3. hypothèse d'axisymétrie d'axe $\mathbf{i}_z$: aucune composante ne dépend de l'angle θ associé à la base cylindrique $(\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_z)$.

5.3.3 Prise en compte de plans de symétrie

Une autre possibilité de simplification du problème est envisageable dans le cas de géométries qui présentent un plan de symétrie ; en effet, si les chargements et les déplacements imposés sont, eux aussi, symétriques vis-à-vis de ce plan, il est possible de ne considérer qu'une moitié du problème, à condition d'associer au plan de symétrie des conditions particulières que nous allons préciser ici. Si, d'un point de vue analytique, la résolution du problème peut s'en trouver facilitée, c'est surtout dans le cadre d'une simulation numérique que la prise en compte de la symétrie s'avère intéressante, dans la mesure où elle permet de réduire le coût associé au calcul.

On associe au plan de symétrie une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ de façon à ce que $\mathbf{i}_3$ soit la normale au plan ; ce dernier est donc d'équation $x_3 = 0$. Pour deux points symétriques, de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3) et $(x_1, x_2, -x_3)$, les déplacements doivent aussi être symétriques par rapport au plan $x_3 = 0$, de telle sorte que leurs composantes (u_1, u_2, u_3) dans $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ vérifient :

$$u_1(x_1, x_2, -x_3) = u_1(x_1, x_2, x_3), \quad u_2(x_1, x_2, -x_3) = u_2(x_1, x_2, x_3), \quad \text{et} \quad u_3(x_1, x_2, -x_3) = -u_3(x_1, x_2, x_3)$$

comme représenté sur la figure 5.4. En faisant tendre x_3 vers zéro, on obtient, par continuité, que

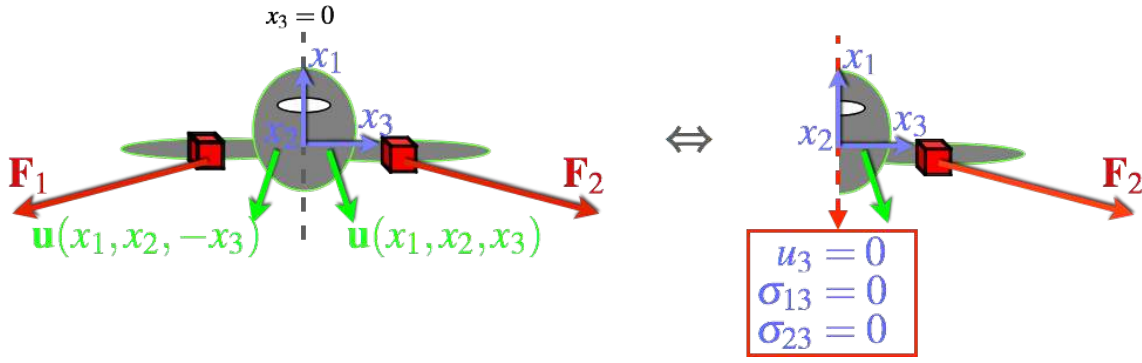


FIGURE 5.4 – Prise en compte d'un plan de symétrie.

les points du plan de symétrie ont un déplacement vérifiant :

$$u_3(x_1, x_2, 0) = 0, \forall x_1, x_2$$

ce qui s'interprète physiquement par le fait qu'un point du plan de symétrie doit rester dans ce plan car on aurait sinon, au niveau de ce point, soit interpénétration, soit création de vide.

Par ailleurs, comme on ne peut rien dire sur les deux autres composantes du champ de déplacement au niveau du plan de symétrie, il est nécessaire, pour que le problème soit bien posé, d'exprimer des conditions sur les efforts surfaciques. On commence ainsi par analyser les dérivées des composantes du déplacement, pour deux points symétriques, de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3) et $(x_1, x_2, -x_3)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, -x_3) &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3), \text{ et } -\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, -x_3) = \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, -x_3) &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3), \text{ et } -\frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, -x_3) = \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir les distorsions associées :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{13}(x_1, x_2, -x_3) &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, -x_3) + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, -x_3) \\ &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -2\varepsilon_{13}(x_1, x_2, x_3) \\ 2\varepsilon_{23}(x_1, x_2, -x_3) &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, -x_3) + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, -x_3) \\ &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -2\varepsilon_{23}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

et, par conséquent, les cisaillements :

$$\begin{aligned} \sigma_{13}(x_1, x_2, -x_3) &= 2\mu\varepsilon_{13}(x_1, x_2, -x_3) = -2\mu\varepsilon_{13}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) \\ \sigma_{23}(x_1, x_2, -x_3) &= 2\mu\varepsilon_{23}(x_1, x_2, -x_3) = -2\mu\varepsilon_{23}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Ces derniers résultats nous permettent donc d'en déduire, par continuité en faisant tendre x_3 vers zéro, qu'il n'y a pas de cisaillement au niveau du plan de symétrie, vis-à-vis de la normale à ce dernier :

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, 0) = 0 = \sigma_{23}(x_1, x_2, 0), \forall x_1, x_2$$

Ces conditions sont en fait équivalentes à celles, présentées dans le paragraphe 5.1.2, concernant une condition de contact glissant sur un plan fixe.

Une fois que le problème est résolu sur le demi-domaine, avec l'adjonction de ces conditions de contact glissant au niveau du plan de symétrie, il suffit d'étendre, par symétrie, la solution sur l'ensemble du domaine.

Résumé 5.5 — Prise en compte d'une symétrie. Dans le cas d'un problème présentant un plan de symétrie Σ_s de normale $\mathbf{i}_3$, il est suffisant de ne traiter que le problème correspondant à l'une des deux moitiés du domaine matériel, en introduisant, au niveau du plan de symétrie, des conditions de contact glissant selon le plan :

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{i}_3 \rangle = 0, \forall \mathbf{x} \in \Sigma_s, \forall t$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{i}_3 - \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_3 \rangle \mathbf{i}_3 = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \Sigma_s, \forall t$$

R Il est en fait possible de résoudre de façon similaire un problème dont les chargements et/ou les déplacements imposés ne sont pas symétriques vis-à-vis du plan de symétrie de la géométrie. En effet, en utilisant le principe de superposition 5.3.1, on peut décomposer la solution recherchée comme la somme de la solution d'un problème symétrique et de la solution d'un problème antisymétrique. Si, pour fixer les idées, on suppose que ce sont les densités volumiques d'efforts $\mathbf{f}_V$ qui ne respectent pas cette symétrie, on peut envisager les deux problèmes suivants, à résoudre sur un demi-domaine :

1. un problème « symétrique », pour lequel on considère comme chargement :

$$\mathbf{f}_V^s(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_V(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{f}_V(x_1, x_2, -x_3)), \forall x_1, x_2, x_3$$

et des conditions de symétrie sur le plan $x_3 = 0$:

$$u_3^s(x_1, x_2, 0) = 0, \text{ et } \sigma_{13}^s(x_1, x_2, 0) = 0 = \sigma_{23}^s(x_1, x_2, 0), \forall x_1, x_2$$

2. un problème « antisymétrique », pour lequel on considère comme chargement :

$$\mathbf{f}_V^a(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_V(x_1, x_2, x_3) - \mathbf{f}_V(x_1, x_2, -x_3)), \forall x_1, x_2, x_3$$

et des conditions d'antisymétrie sur le plan $x_3 = 0$, pour lesquelles il est facile de montrer qu'elles s'écrivent comme :

$$u_1^a(x_1, x_2, 0) = 0 = u_2^a(x_1, x_2, 0), \text{ et } \sigma_{33}^a(x_1, x_2, 0) = 0, \forall x_1, x_2$$

La solution s'obtient donc comme $\mathbf{u} = \mathbf{u}^s + \mathbf{u}^a$ et $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^a$. S'il a fallu effectuer deux calculs sur une demi-géométrie, ceci peut être plus intéressant, en termes de coût de calcul, que résoudre le problème initial lorsque l'on effectue une simulation numérique (par éléments finis typiquement).

5.4 Résumé des formules importantes

Formulation générique d'un problème d'élasticité – Résumé 5.1 page 125

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T) \text{ dans } \Omega$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_u \Omega$$

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = \text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V \text{ dans } \Omega$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f}_S \text{ sur } \partial_{\sigma} \Omega$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbb{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \text{ dans } \Omega$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbb{I} \text{ dans } \Omega$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ et } \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_0 \text{ à } t = 0$$

Formulation en déplacement d'un problème d'élasticité – Résumé 5.2 page 133

$$(\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} (\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) + \mu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \mathbf{f}_V = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \text{ dans } \Omega$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_u \Omega$$

$$\lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{n} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} = \mathbf{f}_S \text{ sur } \partial_\sigma \Omega$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ et } \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_0 \text{ à } t = 0$$

Équations de compatibilité – Résumé 5.3 page 139

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_l \partial x_n} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{lm}}{\partial x_k \partial x_n} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{kn}}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ln}}{\partial x_k \partial x_m}$$

Déformations planes – Résumé 5.4 page 149

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2) \mathbf{i}_1 + u_2(x_1, x_2) \mathbf{i}_2$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2)(\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2) = \lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2)) \mathbb{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2)$$

$$\sigma_{33}(x_1, x_2) = \lambda (\varepsilon_{11}(x_1, x_2) + \varepsilon_{22}(x_1, x_2)) = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right) \neq 0$$

Contraintes planes – Résumé 5.4 page 149

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2)(\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2) = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2) - \frac{\nu}{E} (\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2)) \mathbb{I}$$

$$\varepsilon_{33}(x_1, x_2) = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11}(x_1, x_2) + \sigma_{22}(x_1, x_2)) = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11}(x_1, x_2) + \varepsilon_{22}(x_1, x_2)) \neq 0$$

Prise en compte d'une symétrie (plan Σ_s de normale $\mathbf{i}_3$) – Résumé 5.5 page 151

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{i}_3 \rangle = 0 \text{ sur } \Sigma_s$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{i}_3 - \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_3 \rangle \mathbf{i}_3 = \mathbf{0} \text{ sur } \Sigma_s$$



6. Approximation des poutres

Les modèles de poutres sont des simplifications des modèles issus de la mécanique des milieux continus, dans le cas de structures dites élancées ; des hypothèses sur la cinématique et l'état de contrainte permettent de considérer ces structures comme des cas intermédiaires entre des solides déformables et des corps indéformables, et ainsi d'obtenir des équations dont la résolution, plus aisée, rend ces calculs populaires dans les études d'avant-projet.

POURQUOI ÉTUDIER LES POUTRES ?

6.1 Cinématique d'une poutre

Le premier ingrédient d'un modèle de poutre consiste à faire des hypothèses cinématiques de façon à définir un champ de déplacement approché, plus simple que celui que l'on chercherait, en mécanique des milieux continus tridimensionnelle, dans le cas d'un solide déformable de forme quelconque.

6.1.1 Géométrie et paramétrage

Une poutre est un solide déformable dont l'une des dimensions caractéristiques est très grande devant les deux autres : cette dimension est alors associée à ce que l'on appelle la « ligne moyenne » de la poutre, qui n'est pas nécessairement rectiligne. Les deux autres dimensions concernent ce que l'on nomme « section », qui, par définition, est plane et perpendiculaire à la tangente $\mathbf{e}$ à la ligne moyenne de la poutre quand on considère celle-ci dans sa configuration initiale (c'est-à-dire non déformée). Ainsi, une poutre peut être vue comme une ligne (déformable) autour de laquelle viennent se positionner les différentes sections ; généralement, afin de faciliter la description de la cinématique de la poutre, on privilégie un point par section, qui est le centre géométrique, noté G , de cette dernière, d'où le nom de « ligne moyenne » pour désigner ce qui relie l'ensemble des centres de section.

En termes de paramétrage, un point G sur la ligne moyenne est repéré dans la configuration de

référence par une abscisse curviligne s , qui permet aussi de repérer de façon unique une section Σ donnée. En outre, un point de cette section est repéré par rapport au centre G par ses coordonnées (χ_1, χ_2) dans une base orthonormée $(\mathbf{e}_{\chi_1}(s), \mathbf{e}_{\chi_2}(s))$ cartésienne donnée du plan de la section Σ . Ainsi, un point M de la poutre est repéré dans la configuration initiale par le vecteur position $\mathbf{p}$, qui peut se décomposer comme suit :

$$\mathbf{p}(s, \chi_1, \chi_2) = \mathbf{p}_G(s) + \mathbf{p}_\Sigma(s, \chi_1, \chi_2) = \int_0^s \mathbf{e}(\xi) d\xi + \chi_1 \mathbf{e}_{\chi_1}(s) + \chi_2 \mathbf{e}_{\chi_2}(s)$$

où $\mathbf{p}_G$ est la position du centre G de la section, et $\mathbf{p}_\Sigma$ désigne le vecteur position dans la section du point M (relativement au centre G).

Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons au cas particulier d'une ligne moyenne rectiligne, qui définit alors une poutre dite « droite » (dans sa configuration initiale) : ainsi, le vecteur tangent $\mathbf{e}$ est indépendant de l'abscisse curviligne s , et est appelé « axe » de la poutre droite. Dans ce cas, comme représenté sur la figure 6.1, un point M de la poutre est repéré dans la configuration initiale comme :

$$\mathbf{p}(s, \chi_1, \chi_2) = \mathbf{p}_G(s) + \mathbf{p}_\Sigma(\chi_1, \chi_2) = s\mathbf{e} + \chi_1 \mathbf{e}_{\chi_1} + \chi_2 \mathbf{e}_{\chi_2}$$

les deux vecteurs $(\mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$ étant dans ce cas indépendants de s , vu que la section est perpendiculaire à $\mathbf{e}$ dans la configuration initiale. Nous reviendrons dans le paragraphe 6.3.3 sur le choix pertinent de ces deux vecteurs de base ; pour l'instant, nous nous contenterons de préciser que la base $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$ est orthonormée et directe.

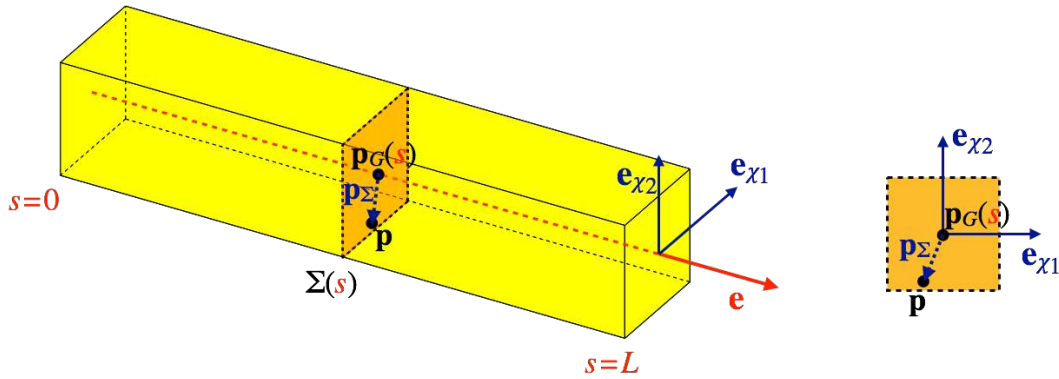


FIGURE 6.1 – Paramétrage associé à une poutre droite.

6.1.2 Hypothèse de section indéformable

Comme on vient de le voir, la géométrie d'une poutre nous invite à considérer de manière distincte ce qui concerne les sections $\Sigma(s)$ de ce qui est relatif à l'axe $\mathbf{e}$ de la poutre, qui relie tous les centres géométriques $G(s)$ de ces sections. La figure 6.2 présente un premier résultat issu d'un essai de flexion trois points effectué sur une poutre droite : cet essai consiste à faire reposer sur deux appuis fixes, espacés d'une distance L , une poutre droite qui est soumise, au niveau du plan médian entre les deux appuis, à un effort, vertical vers le bas, exercé par un rouleau mobile. L'image de droite permet alors de voir, en surimpression, la déformée (fortement amplifiée) de la poutre : les sections initialement planes (qui sont alors de normale horizontale) restent planes après déformation de la poutre, comme on peut le constater sur le quadrillage déformé où les points d'une même section restent à peu près alignés selon un segment, qui ne change pas de longueur (égale à H).

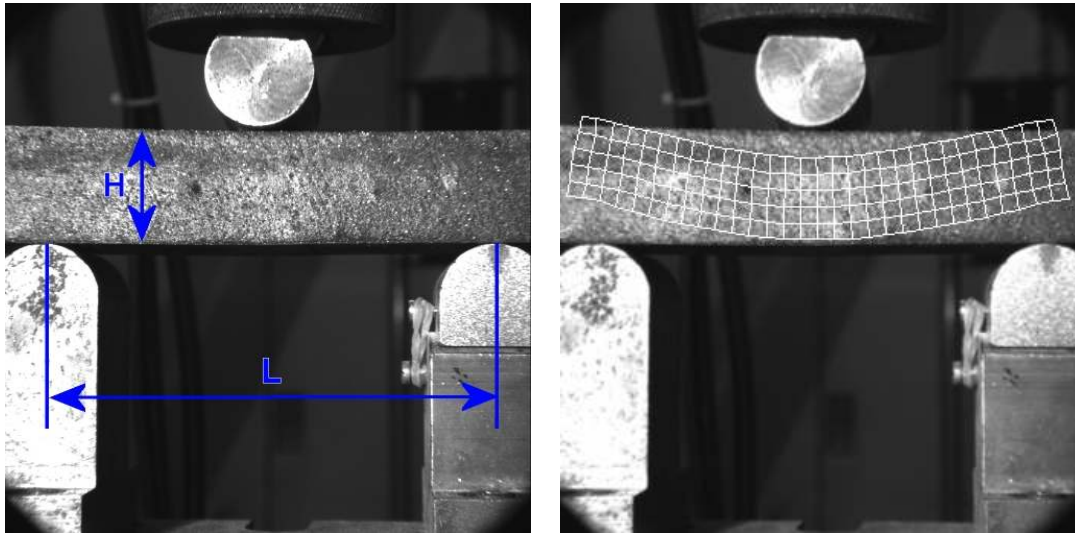


FIGURE 6.2 – Poutre droite soumise à un essai de flexion trois points (à gauche) et déformée (amplifiée) de la poutre, estimée par corrélation d'images (à droite).

Expression du déplacement

Compte tenu de ce résultat expérimental, une première hypothèse cinématique consiste à supposer que les sections ne subissent aucune déformation. Dans ce cas, le placement de tous les points d'une section Σ d'abscisse s donnée vérifie la formule de placement des points d'un solide indéformable, explicitée dans l'exemple 1.3 page 6, à savoir :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_G(t) + \mathbb{R}(t)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_G) = \mathbf{x}_G(t) + \mathbf{x}_\Sigma(t), \quad \forall \mathbf{p} \in \Sigma, \quad \forall t$$

où $\mathbb{R}$ est la rotation de la section Σ d'abscisse s , supposée d'axe $\mathbf{a}$ unitaire et d'angle θ .

Comme dans le cas plus général des solides faiblement déformables en mécanique des milieux continus, nous allons adopter ici l'hypothèse des petites perturbations, qui revient tout d'abord à supposer que la rotation de chaque section est « petite », ce qui implique, comme détaillé dans l'annexe A.2.6, que :

$$\mathbb{R} \approx \mathbb{I} + \theta \mathbf{a}^\wedge$$

à l'ordre un en θ , où $\mathbf{a}^\wedge$ est un tenseur antisymétrique tel que $\mathbf{a}^\wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$, $\forall \mathbf{c}$. De plus, plutôt que d'exprimer le placement des points de la poutre, on préfère, comme en mécanique des milieux continus, s'intéresser au déplacement $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$, qui sera « petit » en vertu de l'hypothèse des petites perturbations :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + \theta \mathbf{a} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{p}_G)$$

où $\mathbf{u}_G = \mathbf{x}_G - \mathbf{p}_G$ désigne le déplacement du centre G de la section Σ d'abscisse s . En notant $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{a}$ le vecteur de petite rotation de section, et en utilisant $\mathbf{p}_\Sigma = \mathbf{p} - \mathbf{p}_G$, le déplacement se réécrit, pour tout point de la section Σ considérée, comme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{p}_\Sigma$$

Enfin, compte tenu du « petit » déplacement, nous pouvons confondre les configurations initiale et déformée, et ainsi exprimer le déplacement à l'instant t à l'aide des variables s et (χ_1, χ_2) , supposées se référer indifféremment aux deux configurations, respectivement comme l'abscisse curviligne des centres des sections Σ d'une part, et les coordonnées locales d'un point dans la section d'abscisse s d'autre part :

$$\mathbf{u}(s, \chi_1, \chi_2, t) = \mathbf{u}_G(s, t) + \boldsymbol{\theta}(s, t) \wedge \mathbf{x}_\Sigma(\chi_1, \chi_2), \quad \forall t$$

pour tout point M de la poutre, de coordonnées (s, χ_1, χ_2) . Autrement dit, la déformation d'une poutre peut s'interpréter comme la déformation d'une ligne moyenne le long de laquelle se placent les sections indéformables ; la figure 6.3 permet d'illustrer cette idée et de montrer comment la poutre, constituée de petits volumes élémentaires (initialement cubiques dans la configuration de référence), se déforme : on constate notamment que la géométrie (transverse) des sections demeure inchangée.

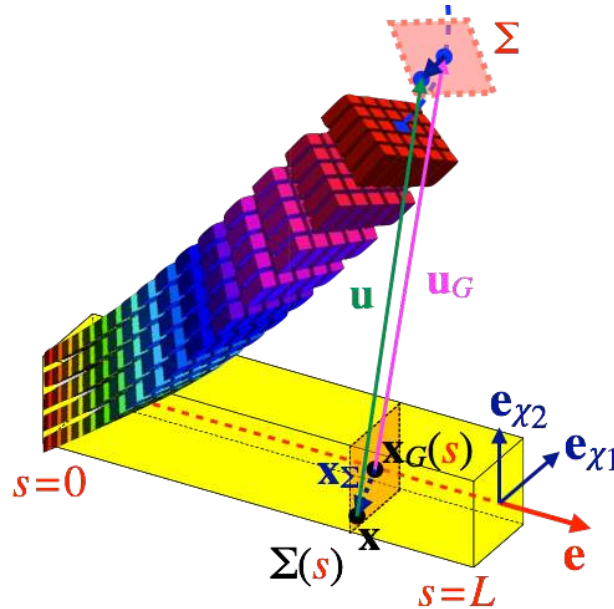


FIGURE 6.3 – Exemple de déformée de poutre dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations : les éléments parallélépipédiques, initialement cubiques, permettent d'apprécier les déformations locales (les déformées sont fortement amplifiées afin de gagner en visibilité).

Cinématique d'une poutre. Le mouvement de chaque section peut être caractérisé par six fonctions scalaires de l'abscisse curviligne s :

- trois fonctions associées à la translation du centre G de la section $\Sigma(s)$, qui sont les trois composantes dans une base donnée du déplacement $\mathbf{u}_G$: tandis que la projection $u_{Ge} = \langle \mathbf{u}_G, \mathbf{e} \rangle$ selon l'axe de la poutre est qualifiée de déplacement longitudinal, et traduit l'élongation de la poutre (c'est-à-dire son allongement ou son raccourcissement), les deux autres projections selon $\mathbf{e}_{\chi_1}$ et $\mathbf{e}_{\chi_2}$ constituent le déplacement transverse $\mathbf{u}_{G\Sigma} = \mathbf{u} - u_e \mathbf{e}$ de la poutre, associé à la distorsion et/ou à la flexion de cette dernière :

$$\mathbf{u}_G = u_{Ge} \mathbf{e} + \mathbf{u}_{G\Sigma} = u_{Ge} \mathbf{e} + u_{G\chi_1} \mathbf{e}_{\chi_1} + u_{G\chi_2} \mathbf{e}_{\chi_2} = \langle \mathbf{u}_G, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} + \langle \mathbf{u}_G, \mathbf{e}_{\chi_1} \rangle \mathbf{e}_{\chi_1} + \langle \mathbf{u}_G, \mathbf{e}_{\chi_2} \rangle \mathbf{e}_{\chi_2}$$

- trois fonctions associées à la petite rotation de la section $\Sigma(s)$, qui sont les trois composantes dans une base donnée du vecteur $\boldsymbol{\theta}$: tandis que la projection $\theta_e = \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{e} \rangle$ selon l'axe de la poutre correspond à la rotation de torsion (la section tourne autour de sa normale), les deux autres projections selon $\mathbf{e}_{\chi_1}$ et $\mathbf{e}_{\chi_2}$ constituent la rotation de flexion $\boldsymbol{\theta}_\Sigma = \boldsymbol{\theta} - \theta_e \mathbf{e}$ de la section, qui tourne alors autour d'un axe contenu dans son plan :

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_e \mathbf{e} + \boldsymbol{\theta}_\Sigma = \theta_e \mathbf{e} + \theta_{\chi_1} \mathbf{e}_{\chi_1} + \theta_{\chi_2} \mathbf{e}_{\chi_2} = \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} + \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}_{\chi_1} \rangle \mathbf{e}_{\chi_1} + \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}_{\chi_2} \rangle \mathbf{e}_{\chi_2}$$

Ces différents mouvements, qui correspondent au modèle dit de poutre de Timoshenko, sont représentés sur la figure 6.4.

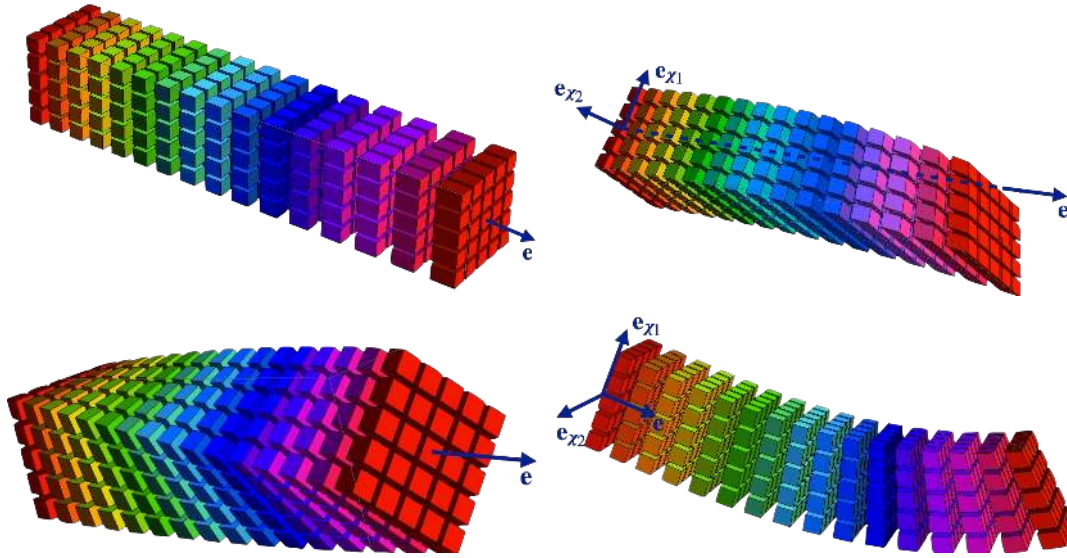


FIGURE 6.4 – Élongation (en haut à gauche), distorsion (en haut à droite), torsion (en bas à gauche) et flexion (en bas à droite) d'une poutre.

Tenseur des petites déformations

Le tenseur des petites déformations est, comme en mécanique des milieux continus, la partie symétrique du gradient des déplacements (paragraphe 1.3.2); ce dernier se calcule à partir des expressions précédentes, dans la base cartésienne $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$, comme :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \otimes \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \chi_1} \otimes \mathbf{e}_{\chi_1} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \chi_2} \otimes \mathbf{e}_{\chi_2}$$

et en réécrivant que $\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma} = \theta_{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma} = \theta_{\mathbf{a}} \wedge (\chi_1 \mathbf{e}_{\chi_1} + \chi_2 \mathbf{e}_{\chi_2})$, on obtient alors, en notant $\bullet' = \frac{d\bullet}{ds}$:

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = (\mathbf{u}'_G + (\theta_{\mathbf{a}} \wedge)' \mathbf{x}_{\Sigma}) \otimes \mathbf{e} + (\theta_{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{e}_{\chi_1}) \otimes \mathbf{e}_{\chi_1} + (\theta_{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{e}_{\chi_2}) \otimes \mathbf{e}_{\chi_2}$$

Dans le cas d'une poutre droite, en introduisant les projections $\bullet_e = \langle \bullet, \mathbf{e} \rangle$ selon l'axe $\mathbf{e}$ d'une part, et $\bullet_{\Sigma} = \bullet - \langle \bullet, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e}$ dans le plan de la section $\Sigma(s)$ d'autre part, on peut réorganiser les termes comme :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = (\mathbf{u}'_{Ge} + \langle (\theta_{\mathbf{a}} \wedge)' \mathbf{x}_{\Sigma}, \mathbf{e} \rangle) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{u}'_{G\Sigma} + ((\theta_{\mathbf{a}} \wedge)' \mathbf{x}_{\Sigma})_{\Sigma}) \otimes \mathbf{e} + \theta_{\mathbf{a}} \wedge (\mathbb{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e})$$

et, en remarquant que $\langle \theta_{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \langle \theta_{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 0$, le gradient des déplacements s'écrit finalement comme :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = (\mathbf{u}'_{Ge} + \langle (\theta_{\mathbf{a}} \wedge)' \mathbf{x}_{\Sigma}, \mathbf{e} \rangle) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \theta_{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{e} + ((\theta_{\mathbf{a}} \wedge)' \mathbf{x}_{\Sigma})_{\Sigma}) \otimes \mathbf{e} + \theta_{\mathbf{a}} \wedge$$

En prenant la partie symétrique de ce gradient, comme $\mathbf{a} \wedge$ est antisymétrique, on aboutit à l'expression suivante pour le tenseur des petites déformations :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{u}'_{Ge} + \langle \boldsymbol{\theta}' \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}, \mathbf{e} \rangle) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{e}) \otimes_S \mathbf{e} + (\boldsymbol{\theta}' \wedge \mathbf{x}_{\Sigma})_{\Sigma} \otimes_S \mathbf{e}$$

en notant $\mathbf{c}_1 \otimes_S \mathbf{c}_2 = (\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{c}_1)/2$ la partie symétrique du produit tensoriel $\mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{c}_2$, et après avoir remplacé $\theta_{\mathbf{a}} \wedge$ par le vecteur de petite rotation $\boldsymbol{\theta}$ correspondant.

On constate alors que le tenseur des petites déformations est antiplan, c'est-à-dire que sa partie plane (dans le plan de la section) est nulle : en effet, l'expression que l'on vient d'établir ne comporte pas de termes en $\mathbf{e}_{\chi_1} \otimes \mathbf{e}_{\chi_1}$, $\mathbf{e}_{\chi_2} \otimes \mathbf{e}_{\chi_2}$, ou $\mathbf{e}_{\chi_1} \otimes \mathbf{e}_{\chi_2}$, mais fait toujours intervenir l'axe $\mathbf{e}$ de la poutre :

- le premier terme, de la forme $\varepsilon_{ee}\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$, traduit une déformation longitudinale au sein de la poutre, et mêle deux effets :
 1. un terme u'_{Ge} qui correspond au taux de variation, le long de la poutre, du déplacement longitudinal des (centres de) sections, et traduit donc directement, en termes de déformation, l'élongation (homogène dans la section) de la poutre ; la figure 6.5 présente le cas particulier où cette déformation est également homogène tout le long de la poutre

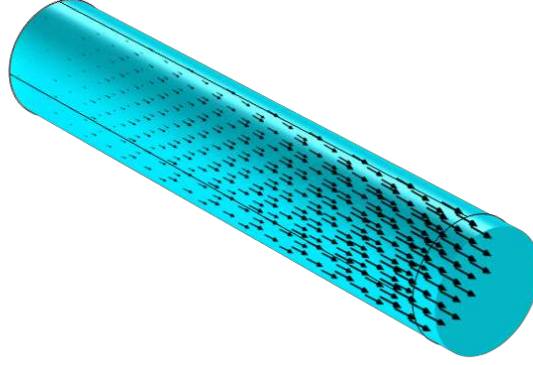


FIGURE 6.5 – Champ de déformation longitudinale dans le cas d'une poutre en élongation (les flèches représentent le champ de déplacement associé).

2. un terme $\langle \boldsymbol{\theta}' \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \rangle = \langle (\boldsymbol{\theta}'_e \mathbf{e} + \boldsymbol{\theta}'_\Sigma) \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \rangle = \langle \boldsymbol{\theta}'_\Sigma \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \rangle$ qui correspond au taux de variation, le long de la poutre, de la rotation de flexion des sections, qui, en tournant autour d'un axe contenu dans leur plan, ont tendance à allonger ou raccourcir des petits segments pris initialement parallèles à la ligne moyenne, et ce, de façon linéaire dans la section ; la figure 6.6 permet de constater cette évolution linéaire selon la hauteur de la poutre, dans le cas particulier où la flexion se fait autour d'un axe horizontal ;

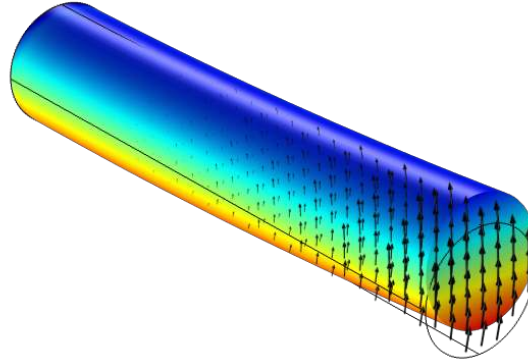


FIGURE 6.6 – Champ de déformation longitudinale dans le cas d'une poutre en flexion (les flèches représentent le champ de déplacement associé).

- les deuxième et troisième termes, de la forme $\boldsymbol{\gamma}_\Sigma \otimes_S \mathbf{e} = 2\varepsilon_{\chi_1 e} \mathbf{e}_{\chi_1} \otimes_S \mathbf{e} + 2\varepsilon_{\chi_2 e} \mathbf{e}_{\chi_2} \otimes_S \mathbf{e}$, traduisent une distorsion au sein de la poutre, avec deux effets distincts :
 1. le premier, associé au terme $(\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{e}) = (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_\Sigma \wedge \mathbf{e})$, traduit une distorsion associée à la rotation de flexion des sections, qui fait que les sections ne restent pas orthogonales à la ligne moyenne déformée : ce terme, souvent appelé « cisaillement transverse » par abus de langage, sera analysé plus finement dans le paragraphe 6.1.3 ;
 2. le second, lié à $(\boldsymbol{\theta}' \wedge \mathbf{x}_\Sigma)_\Sigma = \boldsymbol{\theta}' \wedge \mathbf{x}_\Sigma - \langle \boldsymbol{\theta}' \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} = \boldsymbol{\theta}' \wedge \mathbf{x}_\Sigma - \boldsymbol{\theta}'_\Sigma \wedge \mathbf{x}_\Sigma = \boldsymbol{\theta}'_e \wedge \mathbf{x}_\Sigma$, fait intervenir le taux de variation, le long de la poutre, de la rotation de torsion des sections,

traduisant ainsi une torsion de la poutre où les sections tournent autour de l'axe $\mathbf{e}$; la figure 6.7 montre l'évolution, linéaire selon les deux directions du plan des sections, de la déformation de distorsion.

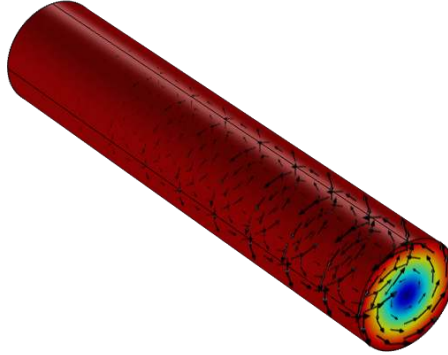


FIGURE 6.7 – Champ de distorsion dans le cas d'une poutre en torsion (les flèches représentent le champ de déplacement associé).

■ **Exemple 6.1 — Expression de la cinématique d'une poutre dans une base cartésienne.** On détaille ici la cinématique que l'on vient d'établir dans le cas d'une poutre droite, lorsque l'on projette ces relations dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$, où $\mathbf{i}_x$ est l'axe de la poutre. Dans ce cas, l'abscisse curviligne est $s = x \in [0, L]$ si la poutre est de longueur L , et les deux autres coordonnées sont $(\chi_1, \chi_2) = (y, z)$.

Le déplacement à l'instant t d'un point M de coordonnées (x, y, z) dans la base $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$, peut alors s'écrire comme :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}_G(x, t) + \boldsymbol{\theta}(x, t) \wedge (y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z)$$

d'où les projections suivantes du déplacement dans la base $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$:

$$u_x(x, y, z, t) = u_{Gx}(x, t) + \theta_y(x, t)z - \theta_z(x, t)y$$

$$u_y(x, y, z, t) = u_{Gy}(x, t) - \theta_x(x, t)z$$

$$u_z(x, y, z, t) = u_{Gz}(x, t) + \theta_x(x, t)y$$

où (u_{Gx}, u_{Gy}, u_{Gz}) et $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ sont respectivement les composantes de $\mathbf{u}_G$ et $\boldsymbol{\theta}$ dans la base $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$.

Après dérivation du déplacement par rapport aux coordonnées spatiales, le tenseur des petites déformations au point M et à l'instant t peut alors s'exprimer dans la base $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$ comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z, t) & \varepsilon_{xy}(x, y, z, t) & \varepsilon_{xz}(x, y, z, t) \\ \varepsilon_{xy}(x, y, z, t) & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xz}(x, y, z, t) & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)}$$

avec, en notant $\bullet' = \frac{d\bullet}{dx}$:

— d'une part, la déformation longitudinale (c'est-à-dire selon l'axe $\mathbf{i}_x$ de la poutre) s'exprimant comme :

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z, t) = \frac{\partial u_x}{\partial x}(x, y, z, t) = u'_{Gx}(x, t) + \theta'_y(x, t)z - \theta'_z(x, t)y$$

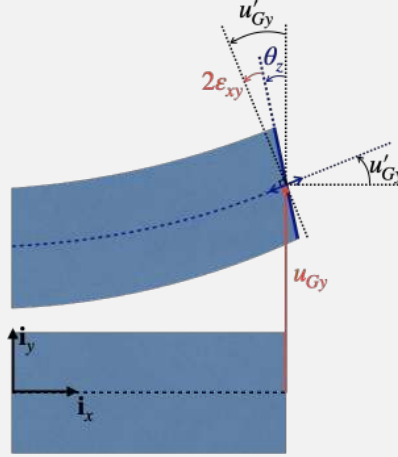
dont les termes correspondent, pour le premier, à l'élongation de la poutre selon $\mathbf{i}_x$ (du type déformation uniaxiale associée à des sollicitations de traction) et, pour les deux autres, à l'élongation causée par la rotation de flexion $\boldsymbol{\theta} = \theta_y\mathbf{i}_y + \theta_z\mathbf{i}_z$ des sections, qui se traduit par l'allongement ou le raccourcissement, hétérogène dans la section, de petits segments pris parallèles à l'axe de la poutre ;

— et, d'autre part, la distorsion $\boldsymbol{\gamma}_\Sigma$ se traduisant par :

$$\varepsilon_{xy}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}(x, y, z, t) + \frac{\partial u_y}{\partial x}(x, y, z, t) \right) = \frac{1}{2} \left(u'_{Gy}(x, t) - \theta_z(x, t) \right) - \frac{1}{2} \theta'_x(x, t)z$$

$$\varepsilon_{xz}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}(x, y, z, t) + \frac{\partial u_z}{\partial x}(x, y, z, t) \right) = \frac{1}{2} (u'_{Gz}(x, t) + \theta_y(x, t)) + \frac{1}{2} \theta'_x(x, t)y$$

la somme des deux premiers termes de chaque expression correspondant à la distorsion engendrée par la flexion, illustrée sur la figure ci-dessous (pour ε_{xy} dans le cas où $\theta_x = 0$), et que l'on détaillera dans le paragraphe 6.1.3, et le dernier terme étant associé à la rotation de torsion $\theta_x \mathbf{i}_x$ des sections autour de leur normale, qui est l'axe $\mathbf{i}_x$ de la poutre.



On vérifie également que la partie plane du tenseur des déformations (dans le plan des sections) est nulle : $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0$, vu que les sections sont considérées indéformables.

Ces résultats correspondent effectivement à l'expression générique déterminée plus haut :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (u'_{Ge} + \langle \boldsymbol{\theta}'_{\Sigma} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}, \mathbf{e} \rangle) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_{\Sigma} \wedge \mathbf{e}) \otimes_S \mathbf{e} + (\boldsymbol{\theta}'_e \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) \otimes_S \mathbf{e}$$

qui permet d'aboutir à :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = & (u'_{Gx} + \langle (\boldsymbol{\theta}'_y \mathbf{i}_y + \boldsymbol{\theta}'_z \mathbf{i}_z) \wedge (y \mathbf{i}_y + z \mathbf{i}_z), \mathbf{i}_x \rangle) \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x \\ & + (u'_{Gy} \mathbf{i}_y + u'_{Gz} \mathbf{i}_z - (\boldsymbol{\theta}_y \mathbf{i}_y + \boldsymbol{\theta}_z \mathbf{i}_z) \wedge \mathbf{i}_x) \otimes_S \mathbf{i}_x + (\boldsymbol{\theta}'_x \mathbf{i}_x \wedge (y \mathbf{i}_y + z \mathbf{i}_z)) \otimes_S \mathbf{i}_x \end{aligned}$$

quand on explicite $\mathbf{e} = \mathbf{i}_x$, $\mathbf{e}_{\chi_1} = \mathbf{i}_y$, $\mathbf{e}_{\chi_2} = \mathbf{i}_z$, et $\mathbf{x}_{\Sigma} = y \mathbf{i}_y + z \mathbf{i}_z$. ■

Résumé 6.1 — Cinématique d'une poutre (de Timoshenko). L'hypothèse cinématique de base pour une poutre est de considérer que les sections sont indéformables, ce qui implique un déplacement de la forme :

$$\mathbf{u}(s, \chi_1, \chi_2, t) = \mathbf{u}_G(s, t) + \boldsymbol{\theta}(s, t) \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}(\chi_1, \chi_2), \quad \forall t$$

pour tout point M de coordonnées (s, χ_1, χ_2) dans le repère $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$ associé à la poutre. $\mathbf{u}_G$ et $\boldsymbol{\theta}$ désignent respectivement le déplacement du centre de section et la (petite) rotation de la section Σ d'abscisse s , tandis que $\mathbf{x}_{\Sigma}$ est le vecteur position dans la section du point considéré.

Le tenseur des petites déformations, quant à lui, s'exprime, dans le cas d'une poutre droite, et en notant $\bullet' = \frac{d\bullet}{ds}$, comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ee} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \boldsymbol{\gamma}_{\Sigma} \otimes_S \mathbf{e} = (u'_{Ge} + \langle \boldsymbol{\theta}'_{\Sigma} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}, \mathbf{e} \rangle) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_{\Sigma} \wedge \mathbf{e}) \otimes_S \mathbf{e} + (\boldsymbol{\theta}'_e \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) \otimes_S \mathbf{e}$$

avec, comme projections, $\bullet_e = \langle \bullet, \mathbf{e} \rangle$ selon l'axe $\mathbf{e}$ et $\bullet_{\Sigma} = \bullet - \langle \bullet, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e}$ dans le plan de la section Σ . Cette cinématique correspond au modèle de poutre dit de Timoshenko.



L'hypothèse de section indéformable n'est qu'une approximation : ainsi, dans le cas d'une sollicitation de type traction selon l'axe de la poutre, on s'attend dans la réalité à avoir une diminution des dimensions transversales de la poutre en vertu de l'effet de Poisson. En fait, cette approximation n'est pas préjudiciable vis-à-vis des problèmes que l'on résoudra, en vertu de la forme antiplane du tenseur des contraintes, que l'on adoptera dans le paragraphe 6.2.1.

En outre, l'hypothèse de section indéformable est également mise à mal dans le cas de la torsion de poutres de sections non circulaires : en effet, on a vu dans l'exemple 5.3 page 130 que, dans ce cas, le phénomène de gauchissement apparaissait, consistant en une déformation hors plan des différentes sections en rotation autour de leur normale. Là encore, ceci n'est pas préjudiciable à la résolution du problème de poutre, mais à condition de tenir compte de la modification, causée par le gauchissement, de la rigidité à la torsion de la poutre, comme mis en évidence dans l'exemple 5.6 page 140 : cette correction nécessite alors de résoudre le problème de mécanique des milieux continus associé.

6.1.3 Hypothèse d'Euler-Bernoulli

Lorsque les poutres sont dites « minces », c'est-à-dire lorsque le rapport entre les dimensions transverses et la longueur de la poutre est très petit (par exemple, $H/L \ll 1$ dans le cas de l'essai de flexion trois points), il est possible d'introduire une hypothèse cinématique supplémentaire, dite d'Euler-Bernoulli, consistant à supposer que les sections, qui sont initialement perpendiculaires à l'axe de la poutre, restent perpendiculaires à la ligne moyenne déformée, qui relie tous les centres de section. La figure 6.8 en propose une mise en évidence expérimentale dans le cas d'un essai de flexion trois points analysé par corrélation d'images : on voit clairement que les différentes sections de la poutre déformée sont perpendiculaires à la ligne moyenne déformée représentée en bleu, dont le placement est donné par $\mathbf{x}_G(s) = s\mathbf{e} + \mathbf{u}_G(s)$, à un instant donné.

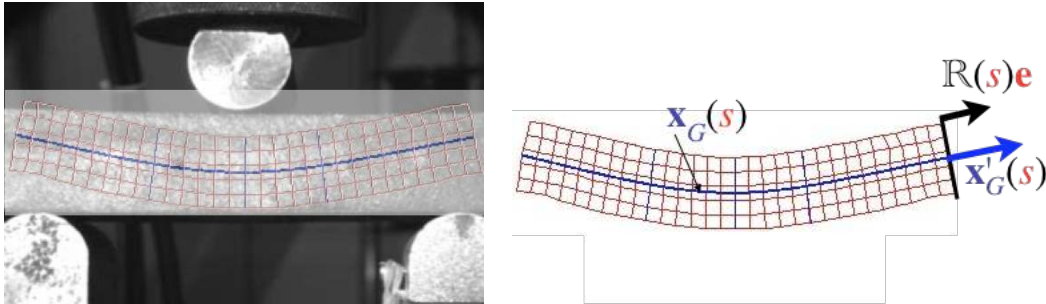


FIGURE 6.8 – Illustration expérimentale de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli dans le cas d'un essai de flexion trois points (mesures par corrélation d'images).

Expression du déplacement

Étudions la conséquence de cette hypothèse sur la cinématique d'une poutre. Plus précisément, on doit exprimer que chaque section est perpendiculaire à la tangente à la ligne moyenne : par définition, cette tangente est colinéaire au vecteur $\mathbf{x}'_G(s) = (s\mathbf{e} + \mathbf{u}_G(s))' = \mathbf{e} + \mathbf{u}'_G(s)$. En outre, chaque section étant perpendiculaire à l'axe $\mathbf{e}$ dans la configuration de référence, la normale à cette section dans la configuration actuelle peut s'exprimer comme $\mathbb{R}\mathbf{e} = (\mathbb{I} + \boldsymbol{\theta} \wedge) \mathbf{e} = \mathbf{e} + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{e}$. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli consiste alors à exprimer que ces deux derniers vecteurs sont colinéaires :

$$(\mathbf{e} + \mathbf{u}'_G) \wedge (\mathbf{e} + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{e}) = \mathbf{0}$$

soit, à l'ordre un, après développement de ce produit vectoriel :

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}'_G \wedge \mathbf{e} + \mathbf{e} \wedge (\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{e}) = -\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma} + \boldsymbol{\theta} - \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} = -\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma} + \boldsymbol{\theta}_\Sigma$$

d'où, finalement :

$$\boldsymbol{\theta}_\Sigma = \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma}$$

ou encore :

$$\mathbf{u}'_{G\Sigma} = \boldsymbol{\theta}_\Sigma \wedge \mathbf{e}$$

L'hypothèse d'Euler-Bernoulli permet ainsi de relier la rotation de flexion de chaque section à la dérivée du déplacement transverse de la ligne moyenne.

En introduisant cette relation dans l'expression du déplacement déterminée dans le paragraphe précédent, on obtient finalement que le déplacement de tout point M de la poutre, de coordonnées (s, χ_1, χ_2) , s'écrit comme :

$$\mathbf{u}(s, \chi_1, \chi_2, t) = \mathbf{u}_G(s, t) + (\boldsymbol{\theta}_e(s, t)\mathbf{e} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma}(s, t)) \wedge \mathbf{x}_\Sigma(\chi_1, \chi_2), \forall t$$

Ainsi, la prise en compte de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli permet de réduire à quatre (au lieu de six) le nombre de fonctions scalaires nécessaires pour décrire le déplacement de l'ensemble des points d'une poutre :

- les trois composantes du déplacement $\mathbf{u}_G$ de la ligne moyenne ;
- la composante de torsion $\boldsymbol{\theta}_e$ de la rotation de section, sachant que les deux composantes de $\boldsymbol{\theta}_\Sigma$ sont fixées par $\mathbf{u}_{G\Sigma}$ du fait de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

Tenseur des petites déformations

Lorsque l'on prend en compte l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, l'expression du tenseur des petites déformations devient, dans le cas d'une poutre droite :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (u'_{Ge} + \langle (\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma})' \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \rangle) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - (\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma}) \wedge \mathbf{e}) \otimes_S \mathbf{e} + (\boldsymbol{\theta}'_e \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma) \otimes_S \mathbf{e}$$

soit, finalement, après développement de tous les doubles produits vectoriels :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (u'_{Ge} - \langle \mathbf{u}''_{G\Sigma}, \mathbf{x}_\Sigma \rangle) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + (\boldsymbol{\theta}'_e \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma) \otimes_S \mathbf{e}$$

Ainsi, l'effet principal de cette hypothèse est l'annulation du terme de « cisaillement transverse », c'est-à-dire de la distorsion associée à la rotation de flexion des sections : en effet, comme on a supposé que ces dernières restaient perpendiculaires à la ligne moyenne déformée, les angles initialement droits restent droits, et il n'y a donc pas de distorsion liée à la flexion de la poutre.

La figure 6.9 permet de constater expérimentalement la validité de cette hypothèse sur un essai de flexion trois points : les valeurs du champ de distorsion, obtenu par corrélation d'images, sont très inférieures à celles du champ de déformation longitudinale, sauf au niveau des appuis où des valeurs plus élevées sont mesurées. Cet effet serait d'ailleurs plus prononcé si la poutre présentait un rapport H/L encore plus petit : en cela, le modèle de poutre reposant sur l'hypothèse d'Euler-Bernoulli est une approximation du modèle de poutre de Timoshenko.

En outre, on vérifie également qu'expérimentalement, le champ de déformation longitudinale évolue de façon sensiblement linéaire dans l'épaisseur sauf, encore une fois, au niveau des appuis ; en vertu du principe de Saint-Venant, ceci permet de vérifier la validité de la déformation longitudinale pour le modèle de poutre proposé :

$$\varepsilon_{ee} = u'_{Ge} - \langle \mathbf{u}''_{G\Sigma}, \mathbf{x}_\Sigma \rangle$$

montrant que les effets de l'élongation et de la flexion s'additionnent simplement.

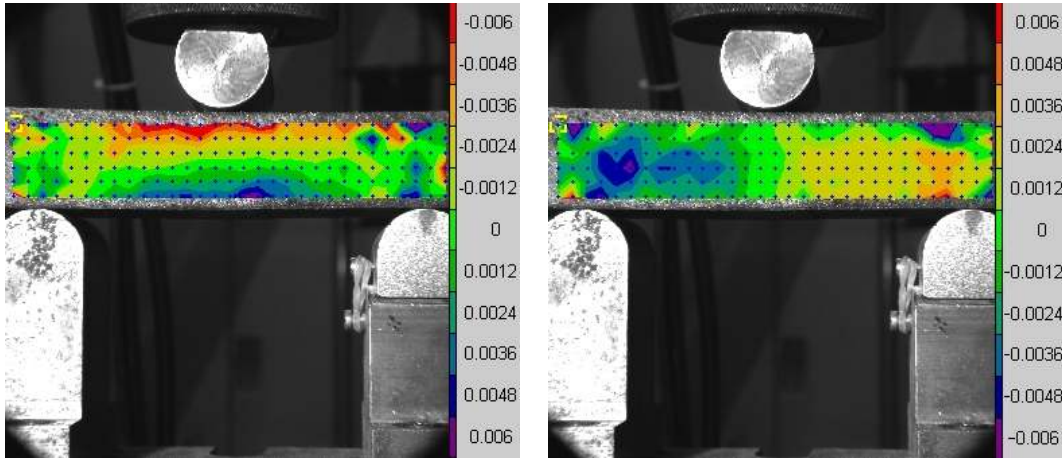


FIGURE 6.9 – Champs de déformation longitudinale (à gauche) et de distorsion (à droite) mesurés par corrélation d'images dans le cas d'un essai de flexion trois points.

■ **Exemple 6.2 — Prise en compte de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli dans une base cartésienne.**

On reprend ici le cas de l'exemple 6.1, où la poutre droite est d'axe $\mathbf{i}_x$ et de sections initialement dans le plan $(\mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$.

La prise en compte de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli permet alors d'écrire le déplacement à l'instant t d'un point M de coordonnées (x, y, z) dans la base $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$ comme :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}_G(x, t) + (\theta_x(x, t)\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_x \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma}(x, t)) \wedge (y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z)$$

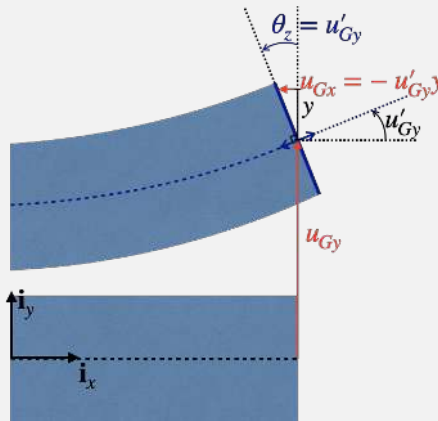
d'où les projections suivantes du déplacement dans la base $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$:

$$u_x(x, y, z, t) = u_{Gx}(x, t) - u'_{Gy}(x, t)y - u'_{Gz}(x, t)z$$

$$u_y(x, y, z, t) = u_{Gy}(x, t) - \theta_x(x, t)z$$

$$u_z(x, y, z, t) = u_{Gz}(x, t) + \theta_x(x, t)y$$

comme illustré, dans le cas de la composante u_x et d'une flexion $\theta_z < 0$ autour de l'axe $\mathbf{i}_z$, sur la figure ci-dessous (où $u'_{Gz} = 0$ et $\theta_x = 0$).



Après dérivation, le tenseur des petites déformations au point M peut alors s'exprimer, à l'instant t et dans la base $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$, comme :

$$\mathfrak{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z, t) & \varepsilon_{xy}(x, y, z, t) & \varepsilon_{xz}(x, y, z, t) \\ \varepsilon_{xy}(x, y, z, t) & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xz}(x, y, z, t) & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)}$$

avec :

— d'une part, la déformation longitudinale s'exprimant comme :

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z, t) = \frac{\partial u_x}{\partial x}(x, y, z, t) = u'_{Gx}(x, t) - u''_{Gy}(x, t)y - u''_{Gz}(x, t)z$$

dont les termes traduisent, comme auparavant, pour le premier, l'élongation de la poutre selon $\mathbf{i}_x$ et, pour les deux autres, l'élongation causée par la flexion de la poutre, qui est désormais directement liée à la courbure de cette dernière, associée aux dérivées secondes u''_{Gy} et u''_{Gz} du déplacement transverse de la ligne moyenne ;

— et, d'autre part, la distorsion se traduisant par :

$$\varepsilon_{xy}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}(x, y, z, t) + \frac{\partial u_y}{\partial x}(x, y, z, t) \right) = -\frac{1}{2} \theta'_x(x, t)z$$

$$\varepsilon_{xz}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}(x, y, z, t) + \frac{\partial u_z}{\partial x}(x, y, z, t) \right) = \frac{1}{2} \theta'_x(x, t)y$$

pour laquelle il ne reste que l'effet lié à la torsion de la poutre, associée à la rotation des sections autour de l'axe de la poutre.

On retrouve bien sûr ce résultat à partir de l'expression générique de la déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (u'_{Ge} - \langle \mathbf{u}''_{G\Sigma}, \mathbf{x}_\Sigma \rangle) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + (\theta'_e \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma) \otimes_S \mathbf{e}$$

en explicitant $\mathbf{e} = \mathbf{i}_x$, $\mathbf{e}_{\chi_1} = \mathbf{i}_y$, $\mathbf{e}_{\chi_2} = \mathbf{i}_z$, et $\mathbf{x}_\Sigma = y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z$. ■

Résumé 6.2 — Cinématique d'une poutre (d'Euler-Bernoulli). Dans le cas de poutres « minces », on peut ajouter à la cinématique de poutre de Timoshenko l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, qui consiste à exprimer que les sections restent perpendiculaires à la ligne moyenne déformée :

$$\boldsymbol{\theta}_\Sigma(s, t) = \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma}(s, t), \quad \forall s, \forall t$$

où $\mathbf{u}'_{G\Sigma} = \mathbf{u}'_G - \langle \mathbf{u}'_G, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e}$, ce qui implique finalement un champ de déplacement de la forme :

$$\mathbf{u}(s, \chi_1, \chi_2, t) = \mathbf{u}_G(s, t) + (\theta_e(s, t) \mathbf{e} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma}(s, t)) \wedge \mathbf{x}_\Sigma(\chi_1, \chi_2), \quad \forall t$$

pour tout point M de coordonnées (s, χ_1, χ_2) dans le repère $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$ associé à la poutre. $\mathbf{u}_G$ et θ_e désignent respectivement le déplacement du centre de section et la (petite) rotation de torsion (c'est-à-dire autour de l'axe $\mathbf{e}$) de la section Σ d'abscisse s , tandis que $\mathbf{x}_\Sigma$ est le vecteur position dans la section du point considéré.

Le tenseur des petites déformations, quant à lui, s'exprime, dans le cas d'une poutre droite, comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ee} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \boldsymbol{\gamma}_\Sigma \otimes_S \mathbf{e} = (u'_{Ge} - \langle \mathbf{u}''_{G\Sigma}, \mathbf{x}_\Sigma \rangle) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + (\theta'_e \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma) \otimes_S \mathbf{e}$$

Cette cinématique correspond au modèle de poutre dit d'Euler-Bernoulli.



Dans le cas d'une poutre courbe, l'expression du déplacement reste la même que dans les résumés 6.1 et 6.2. En revanche, il est nécessaire, pour le calcul du tenseur des petites déformations, de tenir compte de la dépendance des vecteurs $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}_{\chi_1}$ et $\mathbf{e}_{\chi_2}$ vis-à-vis de l'abscisse s .

Ainsi, comme $\mathbf{e}$ est un vecteur unitaire, on sait que $(\|\mathbf{e}(s)\|^2)' = 2\langle \mathbf{e}'(s), \mathbf{e}(s) \rangle = 0$, $\forall s$, et on définit alors le vecteur normal comme :

$$\mathbf{n}(s) = \rho(s) \mathbf{e}'(s), \quad \forall s$$

où ρ , appelé rayon de courbure, est tel que le vecteur normal $\mathbf{n}$ soit unitaire.

En outre, on définit le vecteur binormal comme :

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{e}(s) \wedge \mathbf{n}(s), \quad \forall s$$

ce qui permet de disposer d'une base orthonormée « naturelle » vis-à-vis de la géométrie de la poutre, les vecteurs $\mathbf{n}(s)$ et $\mathbf{b}(s)$ étant dans le plan de la section d'abscisse s . On peut notamment montrer les

relations suivantes, utiles dès lors que l'on dérive la cinématique :

$$\mathbf{n}'(s) = -\frac{1}{\rho(s)}\mathbf{e}(s) - \frac{1}{\tau(s)}\mathbf{b}(s), \forall s$$

où τ est appelé le rayon de torsion, et :

$$\mathbf{b}'(s) = \frac{1}{\tau(s)}\mathbf{n}(s), \forall s$$

Plus de précisions peuvent être trouvées dans [Sad14; Sal12].

6.2 Efforts intérieurs dans une poutre

De manière complémentaire à ce qui précède, le second ingrédient d'un modèle de poutre consiste à faire des hypothèses sur les efforts intérieurs au sein d'une poutre de façon à supposer une forme simplifiée du tenseur des contraintes, et d'aboutir à une représentation condensée de ces efforts intérieurs.

6.2.1 Hypothèse sur les contraintes

On considère ici l'exemple d'une poutre encastree à une extrémité sur un bâti fixe, et soumise à une pression uniforme sur sa surface supérieure. Comme les efforts intérieurs associés à ce cas d'étude ne sont pas mesurables directement, une alternative peut consister à s'en remettre à la simulation numérique afin de déterminer le champ de contraintes au sein de la poutre en traitant le problème général de mécanique des milieux continus. On va alors s'intéresser au détail du tenseur des contraintes que l'on développe comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\Sigma + \boldsymbol{\tau}_\Sigma \otimes \mathbf{e} + \mathbf{e} \otimes \boldsymbol{\tau}_\Sigma + \sigma_{ee}\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$$

ou encore, sous forme matricielle (par blocs) dans la base $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_{ee} & \boldsymbol{\tau}_\Sigma^T \\ \hline \boldsymbol{\tau}_\Sigma & \boldsymbol{\sigma}^\Sigma \end{array} \right)$$

afin de distinguer ce qui est relatif à l'axe $\mathbf{e}$ de la poutre, ou au plan Σ de la section. En particulier, $\boldsymbol{\sigma}^\Sigma$ désigne la partie plane de $\boldsymbol{\sigma}$ dans le plan de la section, tandis que σ_{ee} et $\boldsymbol{\tau}_\Sigma = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e})_\Sigma = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e} - \langle \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e}$ désignent respectivement la contrainte normale au plan de la section et le cisaillement dans ce dernier.

La figure 6.10 représente alors un certain nombre de composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dans une section située « suffisamment loin » de l'encastrement (au sens du principe de Saint-Venant). Elle permet ainsi de constater que les ordres de grandeur de chaque composante sont très différents : la composante prépondérante est la composante normale σ_{ee} selon l'axe de la poutre, qui est bien plus forte que le cisaillement $\boldsymbol{\tau}_\Sigma$ dans la section, qui, lui-même, est bien plus grand que les composantes de la partie plane du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\Sigma$.

En outre, une étude asymptotique, dont le détail dépasse le cadre de ce cours, permettrait d'établir que, de façon générale dans une poutre :

$$\frac{\|\boldsymbol{\sigma}^\Sigma\|}{|\sigma_{ee}|} = O\left(\frac{H^2}{L^2}\right)$$

où H est un ordre de grandeur des dimensions transverses de la poutre, et L est sa longueur.

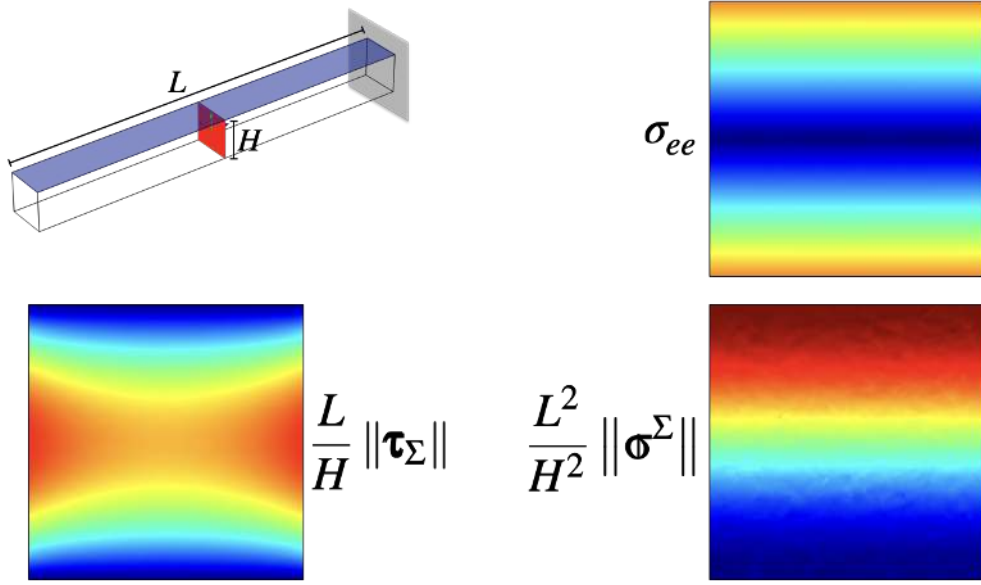


FIGURE 6.10 – Champ des contraintes obtenu par simulation numérique dans une section de poutre soumise à de la flexion.

En conclusion, l'hypothèse systématiquement adoptée dans les modèles de poutre est de supposer que la partie plane du tenseur des contraintes est nulle :

$$\sigma^\Sigma = 0$$

ce qui revient à dire que le tenseur des contraintes est antiplan. Ceci va dans le sens de l'hypothèse cinématique de section indéformable, vue plus haut : en effet, celle-ci implique que les composantes des efforts intérieurs dans le plan de la section ne sont pas accessibles, vu que cette dernière ne se déforme pas. On ne cherchera donc pas à les estimer ici, puisque l'on peut les négliger.

Par conséquent, la connaissance des efforts intérieurs dans une poutre se limite à celle du vecteur contrainte que l'on considère lorsqu'on effectue une coupure selon une section de la poutre :

$$\sigma \mathbf{e} = \sigma_{ee} \mathbf{e} + \boldsymbol{\tau}_\Sigma = \sigma_{ee} \mathbf{e} + \sigma_{\chi_1 e} \mathbf{e}_{\chi_1} + \sigma_{\chi_2 e} \mathbf{e}_{\chi_2}$$

c'est-à-dire un coupure avec comme normale l'axe $\mathbf{e}$ de la poutre. Afin de simplifier les calculs associés à la résolution d'un modèle de poutre, nous allons alors nous limiter à décrire les efforts intérieurs en termes de résultante et moment de ces actions sur chaque section, ce qui, là encore, est cohérent avec le fait de supposer indéformables ces sections. Ceci est l'objet des deux paragraphes qui suivent.

6.2.2 Résultante des efforts intérieurs et équilibre associé

Ainsi, on considère une poutre d'axe $\mathbf{e}$ que l'on coupe selon la section Σ d'abscisse s , de façon à faire apparaître, à l'instant t et en tout point M de coordonnées (χ_1, χ_2) dans la section, le vecteur contrainte :

$$\sigma(s, \chi_1, \chi_2, t) \mathbf{e} = \sigma_{ee}(s, \chi_1, \chi_2, t) \mathbf{e} + \boldsymbol{\tau}_\Sigma(s, \chi_1, \chi_2, t)$$

où $\sigma_{ee} = \langle \sigma \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$ désigne la contrainte normale à la section, et $\boldsymbol{\tau}_\Sigma = (\sigma \mathbf{e})_\Sigma = \sigma \mathbf{e} - \langle \sigma \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e}$ est le cisaillement dans le plan de la section.

Résultante des efforts intérieurs. La résultante $\mathbf{R}$ des efforts intérieurs au niveau d'une section d'abscisse s se définit de manière classique comme la résultante associée au vecteur contrainte pris en tout point de la section :

$$\mathbf{R}(s, t) = \int_{\Sigma(s)} \boldsymbol{\sigma}(s, \chi_1, \chi_2, t) \mathbf{e} dS, \quad \forall s \in [0, L], \quad \forall t$$

Cette définition revient alors à exprimer les actions locales exercées par la partie « aval » de la poutre (c'est-à-dire du tronçon de poutre d'abscisses strictement supérieures à s) sur la partie « amont » (c'est-à-dire le tronçon de poutre d'abscisses strictement inférieures à s), vu que l'on a choisi, pour exprimer le vecteur contrainte, $\mathbf{n} = \mathbf{e}$ comme normale sortante.

On définit alors les composantes suivantes de la résultante des efforts intérieurs, représentées sur la figure 6.11 :

- la composante $R_e = \langle \mathbf{R}, \mathbf{e} \rangle$ est appelée effort normal (souvent notée N également) ;
- le vecteur $\mathbf{R}_\Sigma = \mathbf{R} - \langle \mathbf{R}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e}$ est appelé effort tranchant, de composantes R_{χ_1} et R_{χ_2} dans la base $(\mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$ (souvent notées T_{χ_1} et T_{χ_2} également).

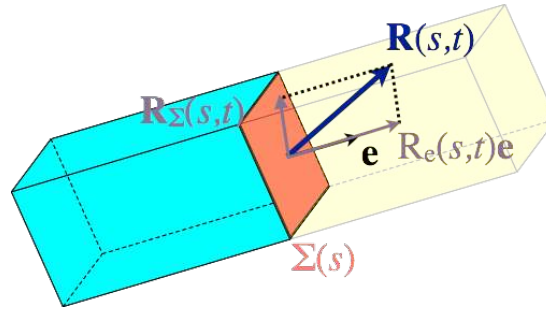


FIGURE 6.11 – Définitions des composantes de la résultante des efforts intérieurs.



Le choix de l'orientation dans la définition de la résultante des efforts intérieurs est purement conventionnel. On aurait également pu définir cette dernière comme la résultante des actions de la partie amont sur la partie aval de la poutre, en considérant une normale sortante $\mathbf{n} = -\mathbf{e}$:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \int_{\Sigma(s)} \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e}) dS$$

convention que l'on trouve d'ailleurs dans les pays anglo-saxons. Il est donc capital de préciser la convention adoptée avant de résoudre un problème de poutre.

Équilibre en résultante : approche globale

Nous allons maintenant déterminer la relation d'équilibre que doit vérifier cette résultante, dans le cas statique, ou quasi-statique. On suppose tout d'abord que, comme tout milieu continu, la poutre est soumise à un ensemble de densités volumiques d'efforts $\mathbf{f}_V$ dans son domaine Ω , et surfaciques $\mathbf{f}_S$ sur la frontière $\partial\Omega$ de son domaine.

Si l'on isole, comme représenté sur la figure 6.12, un tronçon ω de poutre provenant de la coupure de la poutre en deux parties au niveau de la section Σ d'abscisse s , on peut établir que ce tronçon est soumis :

- en 0 à la résultante $\mathbf{R}_0$ des actions extérieures sur cette section ;
- en s à la résultante des actions intérieures sur cette section ;
- aux actions extérieures représentées par les densités volumiques $\mathbf{f}_V$ et surfaciques $\mathbf{f}_S$ d'efforts.

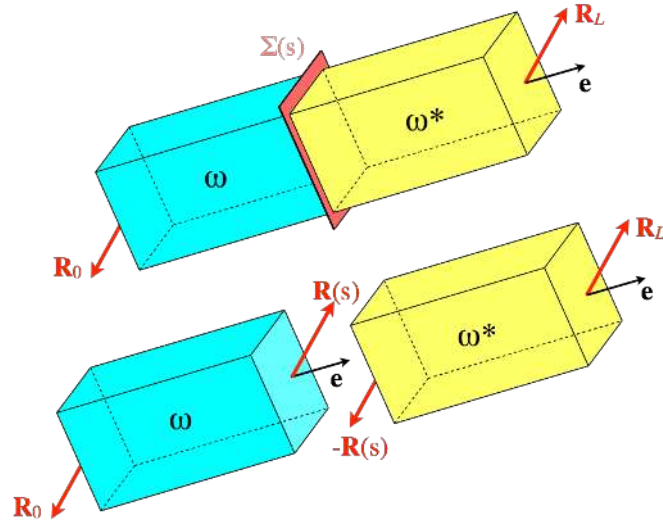


FIGURE 6.12 – Équilibre en résultante : la poutre est coupée en deux tronçons au niveau de la section $\Sigma(s)$.

L'équation d'équilibre statique de ce tronçon ω s'écrit alors comme :

$$\int_{\omega} \mathbf{f}_V dV + \int_{\partial_l \omega} \mathbf{f}_S dS + \int_{\Sigma(0)} \mathbf{f}_S dS + \int_{\Sigma(s)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} dS = \mathbf{0}$$

où l'on a distingué les intégrales surfaciques selon qu'elles concernaient les deux sections d'abscisses respectives 0 et s , ou bien la surface latérale $\partial_l \omega$ du tronçon. En introduisant la résultante des efforts intérieurs en s et la résultante des efforts extérieurs, puis en décomposant les intégrales, on obtient alors :

$$\int_0^s \int_{\Sigma} \mathbf{f}_V dS ds + \int_0^s \int_{\partial \Sigma} \mathbf{f}_S dl ds + \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}$$

où $\partial \Sigma$ désigne la frontière de la section Σ .

Densité linéique d'effort. Connaissant l'ensemble des densités volumiques et surfaciques d'efforts s'exerçant sur la poutre, on définit une densité linéique d'effort $\mathbf{f}_L$ équivalente comme :

$$\mathbf{f}_L(s) = \int_{\Sigma(s)} \mathbf{f}_V(s, \chi_1, \chi_2) dS + \int_{\partial \Sigma(s)} \mathbf{f}_S(s, \chi_1, \chi_2) dl$$

pour toute section Σ d'abscisse s distincte des extrémités de la poutre. Compte tenu des dimensions des densités d'effort $\mathbf{f}_V$ (en N/m^3) d'une part, et $\mathbf{f}_S$ (en N/m^2) d'autre part, la densité $\mathbf{f}_L$ a pour unités des N/m , et est donc effectivement homogène à une densité linéique d'effort.

Avec cette définition, l'équation d'équilibre en résultante devient :

$$\int_0^s \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

ce qui permet de déterminer l'expression de la résultante $\mathbf{R}$ le long de la ligne moyenne de la poutre. Cette équation d'équilibre statique est également valable dans le cas quasi-statique, puisque celui-ci revient à négliger les termes d'inertie dans l'équilibre en résultante du tronçon ω ; en revanche, les différentes quantités peuvent dépendre alors du temps t .

De manière similaire, l'isolement de l'autre tronçon ω^* permet de mettre en évidence :

- en L la résultante $\mathbf{R}_L$ des actions extérieures sur cette section ;
 - en s la résultante des actions intérieures sur cette section, qui s'exprime alors comme $-\mathbf{R}(s)$ vu qu'il s'agit de l'action de la partie amont de la poutre sur la partie aval ;
 - les actions extérieures représentées par les densités volumiques $\mathbf{f}_V$ et surfaciques $\mathbf{f}_S$ d'efforts.
- En procédant de même qu'auparavant, on obtient ainsi, en termes de résultante :

$$\int_s^L \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \mathbf{R}_L - \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

R Si le choix du tronçon isolé pour exprimer la résultante des efforts intérieurs est bien sûr arbitraire, les deux expressions conduisent bien sûr au même résultat. En effet, si l'on ajoute les deux équations d'équilibre obtenues, on trouve :

$$\int_0^L \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_L = \mathbf{0}$$

ce qui correspond à l'équilibre global en résultante de la poutre complète.

Résumé 6.3 — Équilibre en résultante (approche globale). L'équilibre en résultante d'un tronçon de poutre soumis à des densités volumiques $\mathbf{f}_V$ et surfaciques $\mathbf{f}_S$ d'efforts s'écrit, dans le cas statique et d'une approche globale, comme :

$$\int_0^s \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

ou encore comme :

$$\int_s^L \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \mathbf{R}_L - \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

où $\mathbf{f}_L$ est la densité linéique d'effort équivalente aux densités $\mathbf{f}_V$ et $\mathbf{f}_S$:

$$\mathbf{f}_L(s) = \int_{\Sigma(s)} \mathbf{f}_V(s, \chi_1, \chi_2) dS + \int_{\partial\Sigma(s)} \mathbf{f}_S(s, \chi_1, \chi_2) dl$$

et $\mathbf{R}_0$ et $\mathbf{R}_L$ sont les résultantes des actions extérieures respectivement exercées sur les sections d'abscisses $s = 0$ et $s = L$.



En toute rigueur, les relations précédentes ne permettent pas de déterminer l'expression de la résultante des efforts intérieurs au niveau des sections extrêmes de la poutre, en $s = 0$ et $s = L$. Pour ces derniers cas, il suffit de considérer les efforts surfaciques extérieurs s'exerçant sur la section correspondante pour faire le lien avec la définition de la résultante $\mathbf{R}$.

Ainsi, si $\mathbf{R}_0$ et $\mathbf{R}_L$ sont les résultantes des actions extérieures s'exerçant respectivement sur les sections d'abscisses $s = 0$ et $s = L$, on obtient, par définition :

$$\mathbf{R}_0 = \int_{\Sigma(0)} \mathbf{f}_S dS = \int_{\Sigma(0)} \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e}) dS = -\mathbf{R}(0)$$

vu que la normale sortante à la poutre en $s = 0$ est $\mathbf{n} = -\mathbf{e}$, et :

$$\mathbf{R}_L = \int_{\Sigma(L)} \mathbf{f}_S dS = \int_{\Sigma(L)} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e} dS = \mathbf{R}(L)$$

vu que la normale sortante à la poutre en $s = L$ est $\mathbf{n} = \mathbf{e}$.

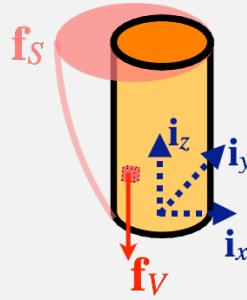
Ces différences de signes, selon que l'on est en $s = 0$ ou en $s = L$, s'interprètent également très bien avec la convention établie plus haut, et passée « à la limite » sur l'extrémité. Ainsi,

l'action de l'extérieur sur la section d'abscisse L est bien une action de l'aval de la poutre sur l'amont (même s'il n'y a pas de poutre à proprement parler au-delà de $s = L$), ce qui justifie le signe « + » : $\mathbf{R}(L) = \mathbf{R}_L$.

Inversement, l'action de l'extérieur sur la section d'abscisse 0 peut être vue comme une action de l'amont de la poutre sur l'aval (même s'il n'y a pas de poutre à proprement parler avant $s = 0$), d'où la nécessité de changer de signe pour rester cohérent avec la définition de la résultante des efforts intérieurs : $\mathbf{R}(0) = -\mathbf{R}_0$.

Bien sûr, ces expressions sont à modifier si l'on adopte la convention contraire dans la définition de la résultante des efforts intérieurs.

■ **Exemple 6.3 — Résultante des efforts intérieurs dans une cheminée soumise au vent : approche globale.** On considère une cheminée assimilable à une poutre droite d'axe $\mathbf{i}_z$ vertical (vers le haut), de hauteur H et de section annulaire de rayons intérieur r_i et extérieur r_e .



On associe à cette dernière la base $(\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta))$ telle que $(O, \mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_z)$ définisse un repère cylindrique, où O est le centre de la section en contact avec le sol. Un point M de la cheminée est donc repéré par ses coordonnées (r, θ, z) dans ce repère :

$$\mathbf{p} \approx \mathbf{x} = \mathbf{x}_G(z) + \mathbf{x}_\Sigma = z\mathbf{i}_z + r\mathbf{i}_r(\theta), \quad \forall r \in [r_i, r_e], \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[, \quad \forall z \in [0, H]$$

en adoptant, comme auparavant, l'hypothèse des petites perturbations. On suppose de plus que le problème est statique et ne dépend pas du temps.

En outre, cette cheminée est soumise à deux actions mécaniques :

- l'action de la pesanteur en tout point de son volume : $\mathbf{f}_V = -\rho g \mathbf{i}_z$, où la masse volumique ρ est supposée uniforme ;
- l'action du vent en tout point de sa surface latérale extérieure $\partial_l \Omega$: $\mathbf{f}_S = -Kz^2 \sin^2(\theta/2) \mathbf{i}_r(\theta)$, où K est une constante supposée connue.

Si l'on coupe la cheminée au niveau d'une section d'altitude z arbitraire, l'isolement du tronçon aval ω^* (c'est-à-dire au-dessus de la coupure en z) permet d'écrire, en statique :

$$\int_z^H \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \mathbf{R}_H - \mathbf{R}(z) = \mathbf{0}$$

où $\mathbf{R}_H = \mathbf{0}$ vu que le bord supérieur de la cheminée est libre d'efforts, et où la densité linéique d'effort se calcule comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_L(z) &= - \int_{\Sigma(z)} \rho g \mathbf{i}_z dS - \int_{\partial \Sigma(z)} Kz^2 \sin^2(\theta/2) \mathbf{i}_r(\theta) dl \\ &= -\rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) \mathbf{i}_z - Kz^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta/2) \mathbf{i}_r(\theta) r_e d\theta \\ &= -\rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) \mathbf{i}_z - \frac{Kr_e}{2} z^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) (\cos \theta \mathbf{i}_x + \sin \theta \mathbf{i}_y) d\theta \\ &= -\rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) \mathbf{i}_z + \frac{K\pi r_e}{2} z^2 \mathbf{i}_x \end{aligned}$$

où l'on a supposé que $\mathbf{i}_r(\theta)$ était défini comme $\mathbf{i}_r(\theta) = \cos \theta \mathbf{i}_x + \sin \theta \mathbf{i}_y$, dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y)$. On aboutit donc à :

$$\mathbf{R}(z) = \int_z^H \left(-\rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) \mathbf{i}_z + \frac{K \pi r_e}{2} \xi^2 \mathbf{i}_x \right) d\xi = -\rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) \left[\xi \right]_z^H \mathbf{i}_z + \frac{K \pi r_e}{2} \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_z^H \mathbf{i}_x$$

soit finalement :

$$\mathbf{R}(z) = -\rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) (H - z) \mathbf{i}_z + \frac{K \pi r_e}{6} (H^3 - z^3) \mathbf{i}_x, \quad \forall z \in]0, H[$$

Ainsi la résultante des efforts intérieurs sur la cheminée comporte deux composantes :

- la composante R_z selon $\mathbf{i}_z$ est l'effort normal, de compression vu qu'il est négatif, et résulte de l'action de la pesanteur ;
- la composante R_x selon $\mathbf{i}_x$ est l'effort tranchant, aussi noté T_x , et résulte de l'action du vent.

L'isolement de la partie amont ω (c'est-à-dire en-dessous de la coupure en z) donne bien sûr le même résultat, mais nécessite au préalable d'écrire l'équation d'équilibre global de la cheminée complète pour déterminer la résultante $\mathbf{R}_0$ de l'action du sol sur la cheminée :

$$\mathbf{R}_0 - mg \mathbf{i}_z + \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}_S dS = \mathbf{0}$$

où $m = \rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) H$ est la masse de la cheminée. On constate alors en particulier que l'on a :

$$\mathbf{R}_0 = \rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) H \mathbf{i}_z - \frac{K \pi}{6} r_e H^3 \mathbf{i}_x = -\mathbf{R}(0)$$



Même si nous nous sommes limités ici au cadre (quasi-)statique, le passage au cadre dynamique est aisé : la prise en compte de la quantité d'accélération dans l'isolement du tronçon ω permet d'établir que :

$$\int_{\omega} \rho \ddot{\mathbf{x}} dV = \int_0^s \int_{\Sigma} \rho \ddot{\mathbf{x}} dS d\xi$$

où l'on peut écrire que :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}_G + \ddot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}$$

et comme G désigne le centre de la section Σ associée, on a, par définition, que $\int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} dS = \mathbf{0}$, et donc que :

$$\int_{\omega} \rho \ddot{\mathbf{x}} dV = \int_0^s \rho A \ddot{\mathbf{u}}_G d\xi$$

ce qui permet d'obtenir finalement :

$$\int_0^s \mathbf{f}_L(\xi, t) d\xi + \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{R}(s, t) = \int_0^s \rho A \ddot{\mathbf{u}}_G(\xi, t) d\xi, \quad \forall t$$

L'isolement de l'autre tronçon ω^* permet quant à lui de trouver que :

$$\int_s^L \mathbf{f}_L(\xi, t) d\xi + \mathbf{R}_L(t) - \mathbf{R}(s, t) = \int_s^L \rho A \ddot{\mathbf{u}}_G(\xi, t) d\xi, \quad \forall t$$

Équilibre en résultante : approche locale

Au lieu d'écrire l'équilibre d'un tronçon de poutre après coupure au niveau d'une section d'abscisse s , il est possible d'établir une relation locale vérifiée par la résultante en tout point de la ligne moyenne. Pour cela, on part de l'équation d'équilibre établie plus haut pour un tronçon ω , où l'on exprime que la résultante des efforts extérieurs sur la section d'abscisse 0 est $\mathbf{R}_0 = -\mathbf{R}(0)$:

$$\int_0^s \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \mathbf{R}(s) - \mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$$

Cette expression étant valable quelle que soit l'abscisse s considérée, on peut l'interpréter comme l'intégrale d'une relation valable quelle que soit s également :

$$\int_0^s (\mathbf{f}_L(\xi) + \mathbf{R}'(\xi)) d\xi = \mathbf{0}$$

où l'on a posé $\bullet' = \frac{d\bullet}{ds}$, ce qui permet d'obtenir finalement :

$$\mathbf{f}_L(s) + \mathbf{R}'(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

Là encore, cette équation d'équilibre statique est également valable dans le cas quasi-statique ; dans ce cas, les différentes quantités peuvent dépendre alors du temps t .

L'équilibre (quasi-)statique local en résultante de la poutre s'écrit ainsi comme une équation différentielle du premier ordre portant sur la résultante des efforts intérieurs. Pour la résoudre, il est donc nécessaire d'y ajouter une condition aux limites, soit en $s = 0$, soit en $s = L$. Comme précédemment, selon que l'on considère les sections d'abscisses $s = 0$ et $s = L$, on obtient, par définition :

$$\mathbf{R}_0 = \int_{\Sigma(0)} \mathbf{f}_S dS = \int_{\Sigma(0)} \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e}) dS = -\mathbf{R}(0)$$

vu que la normale sortante à la poutre en $s = 0$ est $\mathbf{n} = -\mathbf{e}$, et :

$$\mathbf{R}_L = \int_{\Sigma(L)} \mathbf{f}_S dS = \int_{\Sigma(L)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} dS = \mathbf{R}(L)$$

vu que la normale sortante à la poutre en $s = L$ est $\mathbf{n} = \mathbf{e}$.

Résumé 6.4 — Équilibre en résultante (approche locale). L'équilibre local en résultante d'une poutre soumise à des densités volumiques $\mathbf{f}_V$ et surfaciques $\mathbf{f}_S$ d'efforts s'écrit, dans le cas statique, comme :

$$\mathbf{f}_L(s) + \mathbf{R}'(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

où $\mathbf{f}_L$ est la densité linéique d'effort équivalente aux densités $\mathbf{f}_V$ et $\mathbf{f}_S$:

$$\mathbf{f}_L(s) = \int_{\Sigma(s)} \mathbf{f}_V(s, \chi_1, \chi_2) dS + \int_{\partial\Sigma(s)} \mathbf{f}_S(s, \chi_1, \chi_2) dl$$

Cette équation différentielle se résout à l'aide d'une condition aux limites à écrire en $s = 0$ ou en $s = L$, à savoir :

$$\mathbf{R}(0) = -\mathbf{R}_0, \text{ ou } \mathbf{R}(L) = \mathbf{R}_L$$

où $\mathbf{R}_0$ et $\mathbf{R}_L$ sont les résultantes des actions extérieures respectivement exercées sur les sections d'abscisses $s = 0$ et $s = L$.



Au lieu de partir de l'équilibre en résultante d'un tronçon de poutre, on aurait pu également considérer directement l'équation d'équilibre local établie en mécanique des milieux continus (dans le paragraphe 2.3.1), à savoir :

$$\text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

où la divergence du tenseur des contraintes peut se réécrire comme :

$$\text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial s} \mathbf{e} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \chi_1} \mathbf{e}_{\chi_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \chi_2} \mathbf{e}_{\chi_2} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial s} \mathbf{e} + \text{div}_{\mathbf{x}_\Sigma} \boldsymbol{\sigma}$$

En intégrant la première équation sur une section Σ d'abscisse s , on obtient alors, dans le cas d'une poutre droite (c'est-à-dire quand $\mathbf{e}$ est constant) :

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial s} \mathbf{e} + \text{div}_{\mathbf{x}_\Sigma} \boldsymbol{\sigma} \right) dS + \int_{\Sigma} \mathbf{f}_V dS = \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_{\Sigma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} dS \right) + \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_l dl + \int_{\Sigma} \mathbf{f}_V dS = \int_{\Sigma} \rho \ddot{\mathbf{u}} dS$$

en appliquant la formule de la divergence, avec $\mathbf{n}_l$ la normale unitaire sortante au contour $\partial\Sigma$ de la section Σ , soit finalement :

$$\mathbf{R}' + \int_{\partial\Sigma} \mathbf{f}_S d\mathbf{l} + \int_{\Sigma} \mathbf{f}_V dS = \int_{\Sigma} \rho \ddot{\mathbf{u}} dS$$

ou encore :

$$\mathbf{R}' + \mathbf{f}_L = \rho A \ddot{\mathbf{u}}_G$$

Cette démonstration permet de montrer que l'équation d'équilibre local en résultante est ce que l'on obtient lorsque l'on moyenne, sur chaque section, les équations tridimensionnelles de la mécanique des milieux continus, ce qui revient, en quelque sorte, à « ramener » les équations sur la ligne moyenne de la poutre.

■ **Exemple 6.4 — Résultante des efforts intérieurs dans une cheminée soumise au vent : approche locale.** On reprend ici l'exemple 6.3 pour mettre en évidence l'approche locale. La résultante des efforts intérieurs vérifie alors :

$$\mathbf{R}'(z) + \mathbf{f}_L(z) = \mathbf{0}, \forall z \in]0, H[$$

où $\bullet' = \frac{d\bullet}{dz}$, et où la densité linéique d'effort s'exprime comme :

$$\mathbf{f}_L(z) = -\rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) \mathbf{i}_z + \frac{K \pi r_e}{2} z^2 \mathbf{i}_x$$

après avoir supposé que $\mathbf{i}_r(\theta)$ était défini comme $\mathbf{i}_r(\theta) = \cos \theta \mathbf{i}_x + \sin \theta \mathbf{i}_y$ dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y)$. On trouve alors par intégration que la résultante est :

$$\mathbf{R}(z) = \rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) z \mathbf{i}_z - \frac{K \pi r_e}{6} z^3 \mathbf{i}_x + C$$

La constante C se détermine à l'aide d'une condition aux limites ; ici, la plus naturelle est celle en $z = H$: si l'on suppose qu'aucune action mécanique ne s'exerce sur la section associée (bord libre), on peut écrire que $\mathbf{R}(H) = \mathbf{0}$, d'où, finalement :

$$\mathbf{R}(z) = \rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) (z - H) \mathbf{i}_z - \frac{K \pi r_e}{6} (z^3 - H^3) \mathbf{i}_x$$

comme auparavant. ■

6.2.3 Moment des efforts intérieurs et équilibre associé

De façon similaire, et pour être complet en termes d'équations, il est nécessaire de définir le moment associé au vecteur contrainte $\sigma \mathbf{e}$ lorsque l'on coupe la poutre au niveau de la section d'abscisse s .

Moment des efforts intérieurs. Le moment $\mathbf{M}$ des efforts intérieurs au niveau d'une section d'abscisse s se définit de manière classique comme le moment, exprimé au centre G de la section, associé au vecteur contrainte pris en tout point de la section :

$$\mathbf{M}(s, t) = \int_{\Sigma(s)} \mathbf{x}_{\Sigma}(\chi_1, \chi_2) \wedge (\sigma(s, \chi_1, \chi_2, t) \mathbf{e}) dS, \forall s \in [0, L], \forall t$$

où $\mathbf{x}_{\Sigma} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_G$ est le placement dans la section d'un point de la poutre. Cette définition revient, comme précédemment, à exprimer les actions locales exercées par la partie aval de la poutre sur la partie amont, vu que l'on a choisi $\mathbf{n} = \mathbf{e}$ pour exprimer le vecteur contrainte.

On définit alors les composantes suivantes du moment des efforts intérieurs, représentées sur la figure 6.13 :

- la composante $M_e = \langle \mathbf{M}, \mathbf{e} \rangle$ est appelée moment de torsion, et souvent notée M_t ;
- le vecteur $\mathbf{M}_{\Sigma} = \mathbf{M} - \langle \mathbf{M}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e}$ est appelé moment de flexion (ou encore moment fléchissant), de composantes M_{χ_1} et M_{χ_2} dans la base $(\mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$, souvent notées $M_{f\chi_1}$ et $M_{f\chi_2}$ également.

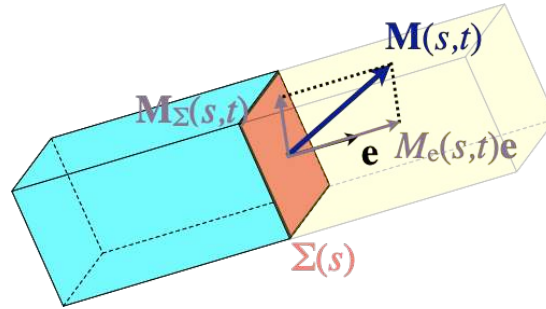


FIGURE 6.13 – Définitions des composantes du moment des efforts intérieurs.



Comme pour la résultante, il est possible de définir le moment avec l'autre choix d'orientation :

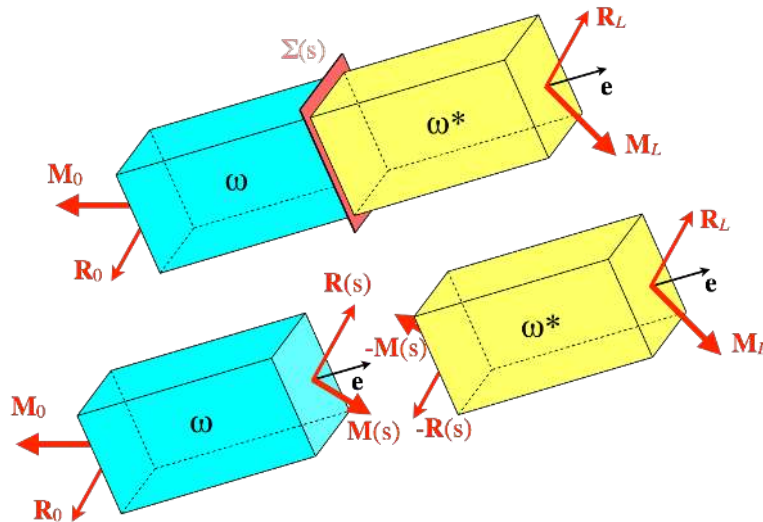
$$\tilde{\mathbf{M}} = \int_{\Sigma(s)} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge (\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e})) dS$$

qui est le choix adopté dans les pays anglo-saxons. Ainsi, encore une fois, il est capital de préciser la convention adoptée avant de résoudre un problème de poutre.

Équilibre en moment : approche globale

Pour déterminer la relation d'équilibre que doit vérifier le moment des efforts intérieurs, nous procédons comme pour la résultante, en isolant un tronçon issu de la coupure en deux parties de la poutre au niveau de la section Σ d'abscisse s , comme illustré sur la figure 6.14. Ainsi, si l'on considère le tronçon ω , celui-ci est soumis :

- en 0 à la résultante $\mathbf{R}_0$ et au moment $\mathbf{M}_0$ (exprimé au centre de cette section) des actions extérieures sur cette dernière ;
- en s à la résultante et au moment (exprimé au centre de cette section) des actions intérieures sur cette dernière ;
- aux actions extérieures représentées par les densités volumiques $\mathbf{f}_V$ et surfaciques $\mathbf{f}_S$ d'efforts.

FIGURE 6.14 – Équilibre en moment : la poutre est coupée en deux tronçons au niveau de la section $\Sigma(s)$.

On peut alors écrire l'équilibre en moment de ce tronçon, exprimé au centre G de la section

d'abscisse s où a été réalisée la coupure :

$$\int_{\omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \mathbf{f}_V dV + \int_{\partial_l \omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \mathbf{f}_S dS + \int_{\Sigma(0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \mathbf{f}_S dS + \int_{\Sigma(s)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} dS = \mathbf{0}$$

où $\partial_l \omega$ est la surface latérale du tronçon. Vu que, pour une poutre droite, le placement d'un point M se trouvant dans une section d'abscisse ξ se décompose comme $\mathbf{x} = \xi \mathbf{e} + \mathbf{x}_\Sigma$, on parvient à la relation :

$$\int_{\omega} ((\xi - s) \mathbf{e} + \mathbf{x}_\Sigma) \wedge \mathbf{f}_V dV + \int_{\partial_l \omega} ((\xi - s) \mathbf{e} + \mathbf{x}_\Sigma) \wedge \mathbf{f}_S dS + \int_{\Sigma(0)} (-s \mathbf{e} + \mathbf{x}_\Sigma) \wedge \mathbf{f}_S dS + \int_{\Sigma(s)} \mathbf{x}_\Sigma \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} dS = \mathbf{0}$$

ou encore, en introduisant le moment des efforts intérieurs en s et les résultante et moment des efforts extérieurs, puis en décomposant les intégrales :

$$\int_0^s \int_{\Sigma} ((\xi - s) \mathbf{e} + \mathbf{x}_\Sigma) \wedge \mathbf{f}_V dS d\xi + \int_0^s \int_{\partial \Sigma} ((\xi - s) \mathbf{e} + \mathbf{x}_\Sigma) \wedge \mathbf{f}_S dl d\xi + \mathbf{M}_0 - s \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_0 + \mathbf{M}(s) = \mathbf{0}$$

où $\partial \Sigma$ désigne la frontière de la section Σ .

Densité linéique de moment. Connaissant l'ensemble des densités volumiques et surfaciques d'efforts s'exerçant sur la poutre, on définit une densité linéique de moment $\mathbf{c}_L$ équivalente, exprimée au centre G de chaque section Σ d'abscisse s comme :

$$\mathbf{c}_L(s) = \int_{\Sigma(s)} \mathbf{x}_\Sigma \wedge \mathbf{f}_V(s, \chi_1, \chi_2) dS + \int_{\partial \Sigma(s)} \mathbf{x}_\Sigma \wedge \mathbf{f}_S(s, \chi_1, \chi_2) dl$$

Compte tenu des dimensions des densités $\mathbf{f}_V$ (en N/m^3) et $\mathbf{f}_S$ (en N/m^2), la nouvelle densité $\mathbf{c}_L$ a pour unités des N , et est donc effectivement homogène à une densité linéique de moment.

En introduisant les densités linéiques $\mathbf{f}_L$ d'effort et $\mathbf{c}_L$ de moment, on peut alors écrire que :

$$\int_0^s (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \int_0^s \mathbf{c}_L(\xi) d\xi + \mathbf{M}_0 - s \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_0 + \mathbf{M}(s) = \mathbf{0}$$

De façon similaire, l'isolement de l'autre tronçon ω^* , en considérant l'équilibre en moment exprimé au centre de la section d'abscisse s , permet d'aboutir simplement à :

$$\int_s^L (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \int_s^L \mathbf{c}_L(\xi) d\xi + \mathbf{M}_L + (L - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_L - \mathbf{M}(s) = \mathbf{0}$$

où le moment des actions intérieures s'exprime comme $-\mathbf{M}(s)$, vu qu'il s'agit de l'action de la partie amont de la poutre sur la partie aval.

R Comme dans le cas de la résultante, la somme des deux relations précédentes permet de retrouver l'équilibre global en moment de la poutre complète :

$$\int_0^L (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \int_0^L \mathbf{c}_L(\xi) d\xi + \mathbf{M}_0 - s \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_0 + \mathbf{M}_L + (L - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_L = \mathbf{0}$$

En remarquant alors que :

$$\int_0^L -s \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(\xi) d\xi = -s \mathbf{e} \wedge \left(\int_0^L \mathbf{f}_L(\xi) d\xi \right) = s \mathbf{e} \wedge (\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_L)$$

en vertu de l'équilibre global en résultante de la poutre complète, on parvient alors à

$$\int_0^L \xi \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \int_0^L \mathbf{c}_L(\xi) d\xi + \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_L + L \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_L = \mathbf{0}$$

ce qui correspond à l'équilibre global en moment de la poutre complète, exprimé au centre de la section d'abscisse $s = 0$.

Résumé 6.5 — Équilibre en moment (approche globale). L'équilibre en moment d'une poutre soumise à des densités volumiques $\mathbf{f}_V$ et surfaciques $\mathbf{f}_S$ d'efforts s'écrit, dans le cas statique et d'une approche globale, comme :

$$\int_0^s (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \int_0^s \mathbf{c}_L(\xi) d\xi + \mathbf{M}_0 - s \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_0 + \mathbf{M}(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

ou encore comme :

$$\int_s^L (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \int_s^L \mathbf{c}_L(\xi) d\xi + \mathbf{M}_L + (L - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_L - \mathbf{M}(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

où $\mathbf{c}_L$ est la densité linéique de moment équivalente aux densités $\mathbf{f}_V$ et $\mathbf{f}_S$:

$$\mathbf{c}_L(s) = \int_{\Sigma(s)} \mathbf{x}_\Sigma(\chi_1, \chi_2) \wedge \mathbf{f}_V(s, \chi_1, \chi_2) dS + \int_{\partial\Sigma(s)} \mathbf{x}_\Sigma(\chi_1, \chi_2) \wedge \mathbf{f}_S(s, \chi_1, \chi_2) dl$$

et $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_L$ sont les moments (exprimés aux centres des sections correspondantes) des actions extérieures respectivement exercées sur les sections d'abscisses $s = 0$ et $s = L$.



En toute rigueur, les relations précédentes ne permettent pas de déterminer l'expression du moment des efforts intérieurs au niveau des sections extrêmes de la poutre, en $s = 0$ et $s = L$. Comme dans le cas de la résultante, il suffit dans ce cas de considérer les efforts surfaciques extérieurs s'exerçant sur la section correspondante pour faire le lien avec la définition du moment $\mathbf{M}$.

Ainsi, si $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_L$ sont les moments des actions extérieures s'exerçant respectivement sur les sections d'abscisses $s = 0$ et $s = L$, on établit que :

$$\mathbf{M}_0 = \int_{\Sigma(0)} \mathbf{x}_\Sigma \wedge \mathbf{f}_S dS = \int_{\Sigma(0)} \mathbf{x}_\Sigma \wedge \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{e}) dS = -\mathbf{M}(0)$$

vu que la normale sortante à la poutre en $s = 0$ est $\mathbf{n} = -\mathbf{e}$, et :

$$\mathbf{M}_L = \int_{\Sigma(L)} \mathbf{x}_\Sigma \wedge \mathbf{f}_S dS = \int_{\Sigma(L)} \mathbf{x}_\Sigma \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} dS = \mathbf{M}(L)$$

vu que la normale sortante à la poutre en $s = L$ est $\mathbf{n} = \mathbf{e}$.

Bien sûr, ces expressions sont à modifier si l'on adopte la convention contraire dans la définition du moment des efforts intérieurs.

■ **Exemple 6.5 — Moment des efforts intérieurs dans une cheminée soumise au vent : approche globale.** On reprend l'exemple 6.3 de la cheminée soumise au vent, afin de déterminer cette fois-ci l'évolution du moment des efforts intérieurs le long de la poutre modélisant cette cheminée. On rappelle que celle-ci est soumise à deux actions mécaniques :

- celle de la pesanteur dans le volume : $\mathbf{f}_V = -\rho g \mathbf{i}_z$;
- celle du vent sur la surface latérale extérieure $\partial_r \Omega$: $\mathbf{f}_S = -K z^2 \sin^2(\theta/2) \mathbf{i}_r(\theta)$.

où l'on a associé à la poutre le repère cylindrique $(O, \mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_z)$.

Si l'on coupe la cheminée au niveau d'une section d'altitude z donnée, l'isolement du tronçon aval ω^* (c'est-à-dire au-dessus de la coupure en z) permet d'obtenir, en statique, quand on exprime l'équilibre en moment au centre de $\Sigma(z)$:

$$\int_z^H \mathbf{c}_L(\xi) d\xi + \int_z^H (\xi - z) \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \mathbf{M}_H + (L - z) \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{R}_H - \mathbf{M}(z) = \mathbf{0}$$

où $\mathbf{R}_H$ et $\mathbf{M}_H$, qui caractérisent l'action mécanique des efforts extérieurs sur la section d'altitude $z = H$, sont nuls, vu que le bord est libre.

On calcule en outre la densité linéique de moment le long de la cheminée comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_L(z) &= - \int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge \rho g \mathbf{i}_z dS - \int_{\partial\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge K z^2 \sin^2(\theta/2) \mathbf{i}_r(\theta) dl \\ &= - \int_{\Sigma} r \mathbf{i}_r(\theta) \wedge \rho g \mathbf{i}_z dS - \int_{\partial\Sigma} r \mathbf{i}_r(\theta) \wedge K z^2 \sin^2(\theta/2) \mathbf{i}_r(\theta) dl \\ &= \rho g \int_{r_i}^{r_e} r^2 dr \int_0^{2\pi} \mathbf{i}_{\theta}(\theta) d\theta \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

sachant que la densité linéique d'effort s'exprime comme :

$$\mathbf{f}_L(z) = -\rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) \mathbf{i}_z + \frac{K \pi r_e}{2} z^2 \mathbf{i}_x$$

L'ensemble des résultats précédents permet d'établir finalement que :

$$\mathbf{M}(z) = \int_z^H \frac{K \pi r_e}{2} (\xi - z) \xi^2 \mathbf{i}_y d\xi = \frac{K \pi r_e}{2} \left[\frac{\xi^4}{4} - z \frac{\xi^3}{3} \right]_z^H \mathbf{i}_y = \frac{K \pi r_e}{24} (z^4 - 4H^3 z + 3H^4) \mathbf{i}_y$$

qui est un moment de flexion autour de l'axe $\mathbf{i}_y$, lié à l'action du vent seulement. On constate donc que l'action de la pesanteur n'a pas d'effet en moment sur la poutre, car cette dernière est verticale.

L'isolement de la partie amont ω (c'est-à-dire en-dessous de la coupure en z) donne bien sûr le même résultat, mais nécessite au préalable d'écrire l'équilibre global de la cheminée complète afin de déterminer le moment $\mathbf{M}_0$ (exprimé au centre de la section d'altitude $z = 0$) de l'action du sol sur la cheminée :

$$\mathbf{M}_0 + \int_{\Omega} \mathbf{x} \wedge \mathbf{f}_V dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \wedge \mathbf{f}_S dS = \mathbf{0}$$

où le moment de l'action de la pesanteur est ici nul. On constate alors en particulier que l'on a :

$$\mathbf{M}_0 = -\frac{K \pi r_e}{8} H^4 \mathbf{i}_y = -\mathbf{M}(0)$$



L'extension au cas dynamique passe par la prise en compte de la dérivée temporelle du moment cinétique (exprimé au centre G de la section de coupure) :

$$\int_{\omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \rho \ddot{\mathbf{x}} dV = \int_0^s \int_{\Sigma} ((\xi - s) \mathbf{e} + \mathbf{x}_{\Sigma}) \wedge \rho \ddot{\mathbf{x}} dS d\xi$$

En transformant, comme dans le paragraphe 6.2.2, le terme d'inertie suivant comme :

$$\int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge \rho \ddot{\mathbf{x}} dS = \int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge \rho \ddot{\mathbf{u}}_G dS + \int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge (\rho \ddot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) dS = \int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge (\rho \ddot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) dS$$

vu que $\int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} dS = \mathbf{0}$, on obtient alors que :

$$\int_{\Sigma(s)} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge (\rho \ddot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) dS = \rho \mathbb{J} \ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

en supposant ρ homogène dans la section, et en posant :

$$\mathbb{J} = \int_{\Sigma} (\|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x}_{\Sigma} \otimes \mathbf{x}_{\Sigma}) dS$$

appelé tenseur d'inertie de section, que l'on étudiera dans le paragraphe 6.3.3.

Finalement, dans le cadre dynamique, la prise en compte des termes d'inertie permet d'obtenir comme équation d'équilibre en moment :

$$\begin{aligned}\int_0^s (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \rho A \ddot{\mathbf{u}}_G(\xi, t) d\xi + \int_0^s \rho \mathbb{J} \ddot{\boldsymbol{\theta}}(\xi, t) d\xi &= \int_0^s (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(\xi, t) d\xi + \int_0^s \mathbf{c}_L(\xi, t) d\xi \\ &\quad + \mathbf{M}_0(t) - s \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{M}(s, t), \quad \forall t\end{aligned}$$

L'isolement de l'autre tronçon ω^* permet quant à lui de trouver que :

$$\int_s^L (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \rho A \ddot{\mathbf{u}}_G(\xi, t) d\xi + \int_s^L \rho \mathbb{J} \ddot{\boldsymbol{\theta}}(\xi, t) d\xi = \int_s^L (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(\xi, t) d\xi + \int_s^L \mathbf{c}_L(\xi, t) d\xi + \mathbf{M}_L(t) + (L - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_L(t) - \mathbf{M}(s, t), \forall t$$

Équilibre en moment : approche locale

Comme dans le cas de la résultante, au lieu d'écrire l'équilibre d'un tronçon après coupure au niveau d'une section d'abscisse s , il est possible d'établir une relation locale vérifiée par le moment en tout point de la ligne moyenne. Ainsi, si l'on reprend l'équation d'équilibre en moment établie précédemment pour un tronçon ω , et que l'on introduit les efforts intérieurs au niveau de la section d'abscisse 0 ($\mathbf{R}_0 = -\mathbf{R}(0)$ et $\mathbf{M}_0 = -\mathbf{M}(0)$), on obtient :

$$\int_0^s (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(\xi) d\xi + \int_0^s \mathbf{c}_L(\xi) d\xi - \mathbf{M}(0) + s \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}(0) + \mathbf{M}(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

or, en utilisant l'équilibre local en résultante ($\mathbf{f}_L + \mathbf{R}' = \mathbf{0}$), on trouve que :

$$\begin{aligned} \int_0^s (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(\xi) d\xi &= - \int_0^s (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}'(\xi) d\xi \\ &= - \left[(\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}(\xi) \right]_0^s + \int_0^s \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}(\xi) d\xi \\ &= -s \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}(0) + \int_0^s \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

ce qui permet finalement de réécrire l'équilibre en moment comme :

$$\int_0^s \mathbf{c}_L(\xi) d\xi + \int_0^s \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}(\xi) d\xi + \mathbf{M}(s) - \mathbf{M}(0) = \mathbf{0}$$

Cette expression étant valable quelle que soit l'abscisse s considérée, on peut l'interpréter comme l'intégrale d'une relation valable quelle que soit s également :

$$\int_0^s (\mathbf{c}_L(\xi) + \mathbf{M}'(\xi) + \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}(\xi)) d\xi = \mathbf{0}$$

où l'on a posé $\bullet' = \frac{d\bullet}{ds}$, ce qui permet d'obtenir finalement :

$$\mathbf{c}_L(s) + \mathbf{M}'(s) + \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

qui est une équation différentielle du premier ordre, nécessitant alors de connaître une condition aux limites pour être résolue :

- soit en $s = 0$: $\mathbf{M}(0) = -\mathbf{M}_0$;
- soit en $s = L$: $\mathbf{M}(L) = \mathbf{M}_L$.

Cette équation d'équilibre statique est également valable dans le cas quasi-statique.

Résumé 6.6 — Équilibre en moment : approche locale. L'équilibre local en moment d'une poutre soumise à des densités volumiques $\mathbf{f}_V$ et surfaciques $\mathbf{f}_S$ d'efforts s'écrit, dans le cas statique, comme :

$$\mathbf{c}_L(s) + \mathbf{M}'(s) + \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

où $\mathbf{c}_L$ est la densité linéique de moment équivalente aux densités $\mathbf{f}_V$ et $\mathbf{f}_S$:

$$\mathbf{c}_L(s) = \int_{\Sigma(s)} \mathbf{x}_\Sigma(\chi_1, \chi_2) \wedge \mathbf{f}_V(s, \chi_1, \chi_2) dS + \int_{\partial\Sigma(s)} \mathbf{x}_\Sigma(\chi_1, \chi_2) \wedge \mathbf{f}_S(s, \chi_1, \chi_2) dl$$

Cette équation différentielle se résout à l'aide d'une condition aux limites à écrire en $s = 0$ ou en $s = L$, à savoir :

$$\mathbf{M}(0) = -\mathbf{M}_0, \text{ ou } \mathbf{M}(L) = \mathbf{M}_L$$

où $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_L$ sont les moments (exprimés aux centres des sections correspondantes) des actions extérieures respectivement exercées sur les sections d'abscisses $s = 0$ et $s = L$.

R De même que pour l'équilibre local en résultante, il est également possible de partir des équations de la mécanique des milieux continus afin de déterminer le résultat établi dans le cas des poutres pour l'équilibre local en moment.

Dans le cadre dynamique, on trouve notamment que :

$$\mathbf{c}_L(s, t) + \mathbf{M}'(s, t) + \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}(s, t) = \int_{\Sigma(s)} \mathbf{x}_{\Sigma}(\chi_1, \chi_2) \wedge (\rho \ddot{\boldsymbol{\theta}}(s, t) \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}(\chi_1, \chi_2)) dS = \rho \mathbb{J} \ddot{\boldsymbol{\theta}}(s, t), \forall s \in]0, L[, \forall t$$

■ **Exemple 6.6 — Moment des efforts intérieurs dans une cheminée soumise au vent : approche locale.** On reprend l'exemple 6.5 de la cheminée soumise au vent, afin de mettre en évidence l'approche locale. Comme on avait vu que la densité linéique de moment $\mathbf{c}_L$ était nulle en tout point de la ligne moyenne, on établit alors l'équilibre local (statique) en moment comme :

$$\mathbf{M}'(z) + \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{R}(z) = \mathbf{0}, \forall z \in]0, H[$$

sachant que l'on avait déterminé précédemment que la résultante des efforts intérieurs était :

$$\mathbf{R}(z) = \rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) (z - H) \mathbf{i}_z - \frac{K \pi r_e}{6} (z^3 - H^3) \mathbf{i}_x$$

On obtient donc :

$$\mathbf{M}(z) = \frac{K \pi r_e}{6} \left(\frac{z^4}{4} - H^3 z \right) \mathbf{i}_y + \mathbf{C}$$

où $\mathbf{C}$ est une constante à déterminer à l'aide de conditions limites. Encore une fois, le plus simple est d'utiliser la condition de bord libre en $z = H$:

$$\mathbf{M}(H) = \mathbf{0}$$

ce qui permet de conclure que :

$$\mathbf{M}(z) = \frac{K \pi r_e}{24} (z^4 - 4H^3 z + 3H^4) \mathbf{i}_y$$

qui correspond au résultat trouvé précédemment. ■

En outre, il est possible d'éliminer la résultante de l'équation d'équilibre en moment pour ne faire intervenir que ce dernier et les différentes densités d'efforts appliquées à la poutre ; pour cela, il suffit de dériver cette équation d'équilibre pour obtenir, dans le cas d'une poutre droite :

$$\mathbf{c}'_L + \mathbf{M}'' + \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}' = \mathbf{0}$$

et d'y injecter l'équation d'équilibre local en résultante ($\mathbf{f}_L + \mathbf{R}' = \mathbf{0}$) pour établir une autre équation d'équilibre en moment :

$$\mathbf{c}'_L(s) + \mathbf{M}''(s) - \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

Enfin, il est possible de déterminer l'effort tranchant $\mathbf{R}_{\Sigma}$ à partir du moment fléchissant, en prenant le produit vectoriel de l'équation d'équilibre local en moment par le vecteur $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{e} \wedge \mathbf{c}_L + \mathbf{e} \wedge \mathbf{M}' + \mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{R}) = \mathbf{0}$$

ce qui donne, après développement du double produit vectoriel, et vu que $\mathbf{e} \wedge \mathbf{M}' = \mathbf{e} \wedge \mathbf{M}'_{\Sigma}$:

$$\mathbf{R}_{\Sigma}(s) = \mathbf{e} \wedge (\mathbf{c}_L(s) + \mathbf{M}'_{\Sigma}(s)), \forall s \in]0, L[$$

R La généralisation au cadre dynamique de ces relations est immédiate ; en effet, on a :

$$\mathbf{c}'_L + \mathbf{M}'' + \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}' = \int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge (\rho \ddot{\boldsymbol{\theta}}' \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) dS = \rho \mathbb{J} \ddot{\boldsymbol{\theta}}'$$

où on peut injecter l'équation d'équilibre en résultante :

$$\rho A \ddot{\mathbf{u}}_G = \mathbf{f}_L + \mathbf{R}'$$

pour obtenir comme autre équation d'équilibre en moment :

$$\mathbf{c}'_L + \mathbf{M}'' + \mathbf{e} \wedge (\rho A \ddot{\mathbf{u}}_G - \mathbf{f}_L) = \int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge (\rho \ddot{\boldsymbol{\theta}}' \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) dS = \rho \mathbb{J} \ddot{\boldsymbol{\theta}}'$$

De même, l'effort tranchant $\mathbf{R}_{\Sigma}$ s'exprime, dans le cadre dynamique, à partir du moment fléchissant, comme :

$$\mathbf{R}_{\Sigma} = \mathbf{e} \wedge \left(\mathbf{c}_L + \mathbf{M}' - \int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge (\rho \dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) dS \right) = \mathbf{e} \wedge \left(\mathbf{c}_L + \mathbf{M}' - \rho \mathbb{J} \dot{\boldsymbol{\theta}} \right)$$

6.2.4 Diagrammes des efforts intérieurs

Afin de rendre compte de façon synthétique des efforts intérieurs le long de la poutre étudiée, il est courant de tracer les composantes non nulles de la résultante et du moment des efforts intérieurs comme des fonctions de l'abscisse des différentes sections de la poutre. Pour plus de clarté, ces diagrammes des efforts intérieurs prennent la forme de graphiques positionnés les uns au-dessus des autres, et dont les abscisses respectives sont alignées, comme représenté sur la figure 6.15. Ces diagrammes sont utiles pour localiser les valeurs extrémales des efforts intérieurs, mais aussi les valeurs maximales de la contrainte normale ou du cisaillement au sein de la poutre, comme on le verra dans le paragraphe 6.3.4.

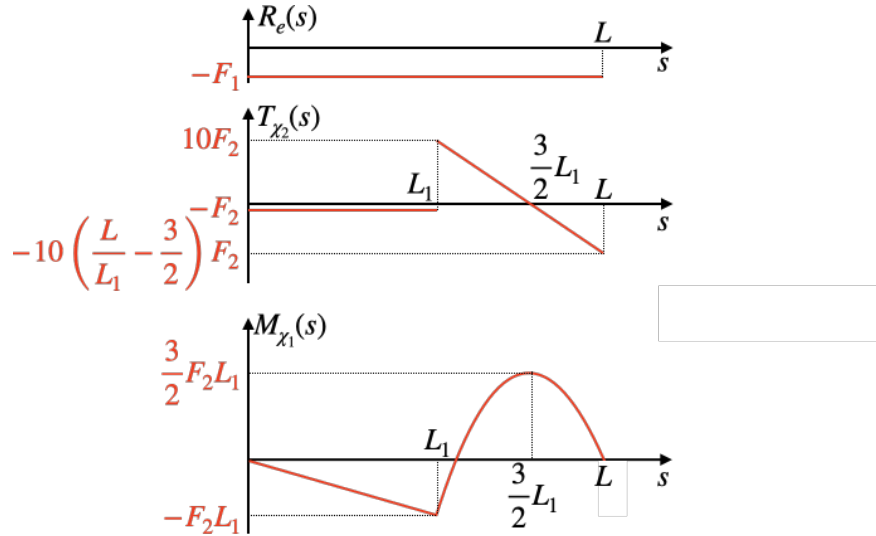


FIGURE 6.15 – Diagrammes de l'effort normal, de l'effort tranchant et du moment fléchissant : exemple pour une poutre en compression-flexion.

R Les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant permettent de vérifier l'expression de l'effort tranchant établie plus haut, à savoir que, dans le cas où il n'y a pas de densité linéique de moment ($\mathbf{c}_L = \mathbf{0}$), l'effort tranchant s'exprime (au signe près selon la composante) directement comme la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse le long de la poutre :

$$T_{\chi_1}(s) = -M'_{\chi_2}(s), \text{ et } T_{\chi_2}(s) = M'_{\chi_1}(s), \forall s \in]0, L[$$

Par conséquent, dans le cas où le moment présente une rupture de pente en un point de la ligne moyenne, l'effort tranchant est discontinu en ce même point.

6.3 Relation de comportement poutre

Maintenant que nous avons défini l'ensemble des ingrédients constitutifs d'un modèle de poutre, aussi bien du point de vue cinématique que de celui des efforts intérieurs, il reste, comme en mécanique des milieux continus, à relier ces quantités par une ou plusieurs relation(s) de comportement. On commence alors par déterminer les relations locales entre les différentes composantes des tenseurs des contraintes et des petites déformations, avant d'établir les relations concernant les résultante et moment des efforts intérieurs.

6.3.1 Relations locales

La difficulté ici réside dans le fait que nous sommes en présence d'un modèle mixte, au sens où nous avons supposé des approximations concernant à la fois le champ de déplacement et le tenseur des contraintes :

- l'hypothèse de section indéformable a pour conséquence l'obtention d'un tenseur des petites déformations antiplan, vis-à-vis du plan des sections ;
- l'hypothèse faite sur le tenseur des contraintes est que celui-ci est également antiplan vis-à-vis du plan des sections.

Or, rigoureusement, ceci est contradictoire avec la relation de comportement d'un matériau élastique linéaire isotrope, déterminée dans le paragraphe 4.2, et de paramètres de Lamé (λ, μ) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbb{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

vu que, dès lors que la déformation longitudinale ε_{ee} dans la poutre n'est pas nulle, la partie plane $\boldsymbol{\sigma}^\Sigma$ du tenseur des contraintes ne l'est pas non plus :

$$\boldsymbol{\sigma}^\Sigma = \lambda \varepsilon_{ee} \mathbb{I}^\Sigma$$

où $\mathbb{I}^\Sigma$ est le tenseur identité dans le plan de la section. Pour des raisons similaires, on obtient bien sûr la même contradiction avec la relation de comportement en souplesse, exprimée à l'aide du module de Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbb{I}$$

dès lors que la contrainte normale σ_{ee} n'est pas nulle dans la poutre.

Finalement, on peut montrer, par des méthodes qui dépassent le cadre de ce cours, que le « meilleur » modèle mixte consiste à partir du tenseur des contraintes antiplan :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ee} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \boldsymbol{\tau}_\Sigma \otimes \mathbf{e} + \mathbf{e} \otimes \boldsymbol{\tau}_\Sigma$$

et utiliser la relation de comportement en souplesse pour déterminer les relations locales du modèle poutre. Dans ce cas, le tenseur des petites déformations s'écrit comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{ee} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \boldsymbol{\tau}_\Sigma \otimes \mathbf{e} + \mathbf{e} \otimes \boldsymbol{\tau}_\Sigma) - \frac{\nu}{E} \sigma_{ee} \mathbb{I}$$

Par ailleurs, l'hypothèse de section indéformable avait conduit, par dérivation, à un tenseur des petites déformations de la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ee} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_\Sigma \otimes \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e} \otimes \boldsymbol{\gamma}_\Sigma$$

avec $\varepsilon_{ee} = u'_{Ge} + \langle \boldsymbol{\theta}'_\Sigma \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \rangle$ et $\boldsymbol{\gamma}_\Sigma = \mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_\Sigma \wedge \mathbf{e} + \boldsymbol{\theta}'_e \wedge \mathbf{x}_\Sigma$ si l'on ne tient pas compte pour l'instant de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

Par identification, on détermine donc que :

$$\varepsilon_{ee} = \frac{\sigma_{ee}}{E}, \text{ et } \gamma_{\Sigma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\Sigma} = \frac{1}{\mu} \tau_{\Sigma}$$

ou, inversement :

$$\sigma_{ee} = E\varepsilon_{ee}, \text{ et } \tau_{\Sigma} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\Sigma} = \mu \gamma_{\Sigma}$$

On a donc relié, localement et de façon réciproque, les parties antiplanes des tenseurs des petites déformations ε et des contraintes σ , ce qui va permettre dans la suite de relier les caractéristiques de la cinématique de la poutre (déplacement du centre de section et rotation de section) avec les efforts intérieurs (résultante et moment).

R Le modèle précédent permet également de déterminer par la relation de comportement en souplesse que la partie plane du tenseur des petites déformations s'écrit comme :

$$\varepsilon^{\Sigma} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{ee} \mathbb{I}^{\Sigma}$$

où $\mathbb{I}^{\Sigma}$ est le tenseur identité dans le plan de la section. Ainsi, on retrouve l'effet de Poisson habituellement observé dans le cas d'un essai de traction sur une éprouvette allongée (les déformations transverses valent en effet $\varepsilon_T = -\nu \varepsilon_{ee}$, comme vu dans le paragraphe 4.2.2), alors même que cet effet avait été négligé dans l'approximation du déplacement, avec l'hypothèse de section indéformable.

Ceci n'est pas nécessairement contradictoire, car l'erreur que l'on commet avec ce déplacement approché est amplifiée lors du calcul du tenseur des petites déformations par le fait que la partie plane de ce dernier dépend des dérivées partielles par rapport aux coordonnées transverses χ_1 et χ_2 , qui sont « petites » par rapport à L : on s'attend ainsi à obtenir une partie plane du tenseur des petites déformations qui ne soit pas représentative de la réalité.

6.3.2 Relation de comportement pour la résultante des efforts intérieurs

En partant de la définition de la résultante des efforts intérieurs, et en utilisant les deux relations locales que l'on vient de déterminer, on obtient, pour une section Σ d'abscisse s donnée, que :

$$\mathbf{R} = \int_{\Sigma} \sigma \mathbf{e} dS = \int_{\Sigma} (\sigma_{ee} \mathbf{e} + \tau_{\Sigma}) dS = \int_{\Sigma} (E\varepsilon_{ee} \mathbf{e} + \mu \gamma_{\Sigma}) dS = \left(\int_{\Sigma} E\varepsilon_{ee} dS \right) \mathbf{e} + \int_{\Sigma} \mu \gamma_{\Sigma} dS$$

Comme, par définition, $\langle \gamma_{\Sigma}, \mathbf{e} \rangle = 0$, on peut traiter séparément le cas de l'effort normal et de l'effort tranchant :

— l'effort normal $N = R_e$ vérifie alors :

$$R_e = \langle \mathbf{R}, \mathbf{e} \rangle = \int_{\Sigma} E\varepsilon_{ee} dS = \int_{\Sigma} E(u'_{Ge} + \langle \boldsymbol{\theta}'_{\Sigma} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}, \mathbf{e} \rangle) dS$$

Comme u'_{Ge} et $\boldsymbol{\theta}'_{\Sigma}$ ne dépendent que de s , et puisque $\int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} dS = \mathbf{0}$ en vertu de la définition du centre G de section, la relation se réduit alors à :

$$R_e = EAu'_{Ge}$$

si l'on suppose que le module de Young E est homogène dans la section d'aire A ;

— l'effort tranchant $\mathbf{T} = \mathbf{R}_{\Sigma}$ vérifie quant à lui :

$$\mathbf{R}_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mu (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_{\Sigma} \wedge \mathbf{e} + \boldsymbol{\theta}'_e \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) dS$$

et, comme $\mathbf{u}'_{G\Sigma}$, $\boldsymbol{\theta}_{\Sigma}$ et $\boldsymbol{\theta}'_e$ ne dépendent que de s , et $\int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} dS = \mathbf{0}$, la relation se réduit alors à :

$$\mathbf{R}_{\Sigma} = \mu A (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_{\Sigma} \wedge \mathbf{e})$$

si l'on suppose que le module de cisaillement μ est homogène dans la section.

Résumé 6.7 — Relation de comportement pour la résultante dans le cas d'une poutre de Timoshenko. Pour une poutre de paramètres (E, μ) constants dans chaque section, la résultante des efforts intérieurs vérifie (où A est l'aire de la section) :

$$\mathbf{R}(s, t) = R_e(s, t)\mathbf{e} + \mathbf{R}_\Sigma(s, t) = EAu'_{Ge}(s, t)\mathbf{e} + \mu A (\mathbf{u}'_{G\Sigma}(s, t) - \boldsymbol{\theta}_\Sigma(s, t) \wedge \mathbf{e}), \quad \forall s \in [0, L], \quad \forall t$$

Si l'on suppose, en outre, que l'hypothèse d'Euler-Bernoulli peut être retenue, on a :

$$\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_\Sigma \wedge \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

comme on l'a vu dans le paragraphe 6.1.3. Pour autant, comme il s'agit d'une approximation sur laquelle une certaine erreur est commise, il n'est pas possible d'affirmer que l'intégrale de cette quantité, calculée sur la section, est également nulle. On peut juste conclure que l'effort tranchant ne peut plus être relié à la cinématique par une relation de comportement : sa connaissance ne pourra ainsi être possible qu'en utilisant les équations d'équilibre en résultante et en moment. Par exemple, si l'on connaît le moment $\mathbf{M}$ des efforts intérieurs en tout point, on peut utiliser l'équation d'équilibre local en moment, comme on l'a vu dans le paragraphe 6.2.3, pour obtenir que :

$$\mathbf{R}_\Sigma(s) = \mathbf{e} \wedge (\mathbf{c}_L(s) + \mathbf{M}'(s)), \quad \forall s \in]0, L[$$

Résumé 6.8 — Relation de comportement pour la résultante dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli. Pour une poutre de module de Young E constant dans chaque section, et qui vérifie l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, la résultante des efforts intérieurs est telle que :

$$\mathbf{R}(s, t) = R_e(s, t)\mathbf{e} + \mathbf{R}_\Sigma(s, t) = EAu'_{Ge}(s, t)\mathbf{e} + \mathbf{R}_\Sigma(s, t), \quad \forall s \in [0, L], \quad \forall t$$

où A est l'aire de la section. L'effort tranchant $\mathbf{R}_\Sigma$ doit être déterminé, dans ce cas, à l'aide des équations d'équilibre en résultante et en moment.

6.3.3 Relation de comportement pour le moment des efforts intérieurs

De même que pour la résultante, on part ici de l'équation définissant le moment des efforts intérieurs, dans laquelle on utilise les deux relations locales pour σ_{ee} et τ_Σ , et on obtient alors, pour une section Σ d'abscisse s donnée :

$$\mathbf{M} = \int_\Sigma \mathbf{x}_\Sigma \wedge (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}) dS = \int_\Sigma \mathbf{x}_\Sigma \wedge (\sigma_{ee}\mathbf{e} + \boldsymbol{\tau}_\Sigma) dS = \int_\Sigma \mathbf{x}_\Sigma \wedge (E\boldsymbol{\varepsilon}_{ee}) dS + \int_\Sigma \mathbf{x}_\Sigma \wedge (\mu\boldsymbol{\gamma}_\Sigma) dS$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}_{ee} = u'_{Ge} + \langle \boldsymbol{\theta}'_\Sigma \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \rangle$ et $\boldsymbol{\gamma}_\Sigma = \mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_\Sigma \wedge \mathbf{e} + \boldsymbol{\theta}'_e \wedge \mathbf{x}_\Sigma$ si l'on ne tient pas compte pour l'instant de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. Analysons séparément les deux intégrales précédentes :

— la première est perpendiculaire à $\mathbf{e}$, et concerne donc la composante de flexion $\mathbf{M}_f = \mathbf{M}_\Sigma$ du moment :

$$\mathbf{M}_\Sigma = \int_\Sigma E \mathbf{x}_\Sigma \wedge u'_{Ge} \mathbf{e} dS + \int_\Sigma E \mathbf{x}_\Sigma \wedge (\boldsymbol{\theta}'_\Sigma \wedge \mathbf{x}_\Sigma) dS$$

vu que $\boldsymbol{\theta}'_\Sigma \wedge \mathbf{x}_\Sigma$ est colinéaire à l'axe $\mathbf{e}$; puisque u'_{Ge} et $\boldsymbol{\theta}'_\Sigma$ ne dépendent que de l'abscisse s , et que $\int_\Sigma \mathbf{x}_\Sigma dS = \mathbf{0}$, la relation se réduit alors à :

$$\mathbf{M}_\Sigma = E \int_\Sigma \mathbf{x}_\Sigma \wedge (\boldsymbol{\theta}'_\Sigma \wedge \mathbf{x}_\Sigma) dS = E \left(\int_\Sigma (\|\mathbf{x}_\Sigma\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x}_\Sigma \otimes \mathbf{x}_\Sigma) dS \right) \boldsymbol{\theta}'_\Sigma = E \mathbb{J} \boldsymbol{\theta}'_\Sigma$$

si l'on suppose que le module de Young E est homogène dans la section ; on note alors $\mathbb{J}$ ce que l'on appelle tenseur d'inertie de section, sur lequel nous reviendrons un peu plus loin ;

- la seconde intégrale est colinéaire à l'axe $\mathbf{e}$, et concerne donc la composante de torsion $M_t = M_e$:

$$M_e = \langle \mathbf{M}, \mathbf{e} \rangle = \left\langle \int_{\Sigma} \mu \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_{\Sigma} \wedge \mathbf{e}) dS, \mathbf{e} \right\rangle + \left\langle \int_{\Sigma} \mu \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge (\boldsymbol{\theta}'_e \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) dS, \mathbf{e} \right\rangle$$

et, comme $\mathbf{u}'_{G\Sigma}$, $\boldsymbol{\theta}_{\Sigma}$ et $\boldsymbol{\theta}'_e$ ne dépendent que de s , et $\int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} dS = \mathbf{0}$, la relation se réduit alors à :

$$M_e = \left\langle \mu \int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge (\boldsymbol{\theta}'_e \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}) dS, \mathbf{e} \right\rangle = \left\langle \mu \int_{\Sigma} \|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \boldsymbol{\theta}'_e dS, \mathbf{e} \right\rangle = \mu I_e \boldsymbol{\theta}'_e$$

avec $I_e = \int_{\Sigma} \|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 dS = \langle \mathbb{J} \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$, appelée inertie polaire de section, et dans le cas où l'on suppose que le module de cisaillement μ est homogène dans la section Σ .

Résumé 6.9 — Relation de comportement pour le moment dans le cas d'une poutre de Timoshenko. Pour une poutre de paramètres (E, μ) constants dans chaque section, le moment des efforts intérieurs vérifie :

$$\mathbf{M}(s, t) = M_e(s, t) \mathbf{e} + \mathbf{M}_{\Sigma}(s, t) = \mu I_e \boldsymbol{\theta}'_e(s, t) \mathbf{e} + E \mathbb{J} \boldsymbol{\theta}'_{\Sigma}(s, t), \quad \forall s \in [0, L], \quad \forall t$$

où $\mathbb{J} = \int_{\Sigma} (\|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x}_{\Sigma} \otimes \mathbf{x}_{\Sigma}) dS$ est le tenseur d'inertie de section, et $I_e = \langle \mathbb{J} \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$ l'inertie polaire de section, détaillés tous deux un peu plus bas.

Si l'on suppose, en outre, que l'hypothèse d'Euler-Bernoulli peut être retenue, c'est-à-dire que les sections restent orthogonales à la ligne moyenne déformée, on a vu dans le paragraphe 6.1.3 que ceci signifie que, dans ce cas :

$$\boldsymbol{\theta}_{\Sigma} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma}$$

expression qu'il suffit d'introduire dans les relations précédentes. Comme, de plus, la poutre est droite, l'axe $\mathbf{e}$ est constant, et on a alors :

$$\boldsymbol{\theta}'_{\Sigma} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}''_{G\Sigma}$$

Résumé 6.10 — Relation de comportement pour le moment dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli. Pour une poutre droite de paramètres (E, μ) constants dans chaque section, et qui vérifie l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, le moment des efforts intérieurs est tel que :

$$\mathbf{M}(s, t) = M_e(s, t) \mathbf{e} + \mathbf{M}_{\Sigma}(s, t) = \mu I_e \boldsymbol{\theta}'_e(s, t) \mathbf{e} + E \mathbb{J} (\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}''_{G\Sigma}(s, t)), \quad \forall s \in [0, L], \quad \forall t$$

où $\mathbb{J} = \int_{\Sigma} (\|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x}_{\Sigma} \otimes \mathbf{x}_{\Sigma}) dS$ est le tenseur d'inertie de section, et $I_e = \langle \mathbb{J} \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$ l'inertie polaire de section, détaillés ci-dessous.



Les relations de comportement que l'on vient d'établir pour la résultante et le moment des efforts intérieurs restent valables dans le cas de poutres courbes, à condition de tenir compte de la dépendance des vecteurs $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}_{\chi_1}$ et $\mathbf{e}_{\chi_2}$ vis-à-vis de l'abscisse s .

Tenseur $\mathbb{J}$: propriétés et calcul pratique

Détaillons maintenant un peu plus le tenseur $\mathbb{J}$ qui intervient dans les relations précédentes.

Tenseur d'inertie de section. On appelle tenseur d'inertie de section, ou encore tenseur d'inertie géométrique, associé à la section Σ d'abscisse s , le tenseur :

$$\mathbb{J} = \int_{\Sigma} (\|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x}_{\Sigma} \otimes \mathbf{x}_{\Sigma}) dS$$

Le tenseur d'inertie de section $\mathbb{J}$ caractérise ainsi comment la « matière » de cette section se répartit spatialement autour de son centre G ; cependant, ici l'intégrale porte sur un domaine surfacique et ne fait pas intervenir la masse volumique, les composantes s'exprimant ainsi en m^4 .

Vis-à-vis de ce tenseur, l'axe $\mathbf{e}$ de la poutre est axe principal d'inertie ; en effet, on a :

$$\mathbb{J}\mathbf{e} = \int_{\Sigma} (\|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x}_{\Sigma} \otimes \mathbf{x}_{\Sigma}) \mathbf{e} dS = \int_{\Sigma} \|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \mathbf{e} dS = I_e \mathbf{e}$$

où $I_e = \int_{\Sigma} \|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 dS$ est appelée inertie polaire de la section Σ .

Si l'on souhaite calculer les composantes de ce tenseur dans la base cartésienne $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$ associée à la poutre, on a :

$$\mathbb{J} = \int_{\Sigma} ((\chi_1^2 + \chi_2^2) \mathbb{I} - (\chi_1 \mathbf{e}_{\chi_1} + \chi_2 \mathbf{e}_{\chi_2}) \otimes (\chi_1 \mathbf{e}_{\chi_1} + \chi_2 \mathbf{e}_{\chi_2})) dS$$

où (s, χ_1, χ_2) sont les coordonnées d'un point de la poutre dans la base $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$: autrement dit, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_G + \mathbf{x}_{\Sigma} = s\mathbf{e} + \chi_1 \mathbf{e}_{\chi_1} + \chi_2 \mathbf{e}_{\chi_2}$. Ainsi, dans cette base, on peut écrire que :

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \int_{\Sigma} (\chi_1^2 + \chi_2^2) dS & 0 & 0 \\ 0 & \int_{\Sigma} \chi_2^2 dS & -\int_{\Sigma} \chi_1 \chi_2 dS \\ 0 & -\int_{\Sigma} \chi_1 \chi_2 dS & \int_{\Sigma} \chi_1^2 dS \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})}$$

Là encore, on constate que l'axe $\mathbf{e}$ de la poutre est axe principal d'inertie du tenseur $\mathbb{J}$, d'inertie principale associée $I_e = \int_{\Sigma} (\chi_1^2 + \chi_2^2) dS$, que l'on a appelée inertie polaire de la section.

En ce qui concerne le plan de la section, comme le tenseur $\mathbb{J}$ est symétrique, on sait qu'il est possible de trouver deux directions orthogonales $\mathbf{e}_{\chi_1}$ et $\mathbf{e}_{\chi_2}$ qui soient axes principaux d'inertie de $\mathbb{J}$, c'est-à-dire qui soient vecteurs propres du tenseur $\mathbb{J}$. Notamment, on peut montrer que les axes de symétrie de la section sont axes principaux d'inertie.

Ainsi, dans la suite, on fera en sorte de systématiquement choisir comme vecteurs $\mathbf{e}_{\chi_1}$ et $\mathbf{e}_{\chi_2}$ les axes principaux d'inertie de la section, et on notera I_{χ_1} et I_{χ_2} les inerties principales respectivement associées. Le tenseur $\mathbb{J}$ est donc diagonal dans la base $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{J} &= I_e \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + I_{\chi_1} \mathbf{e}_{\chi_1} \otimes \mathbf{e}_{\chi_1} + I_{\chi_2} \mathbf{e}_{\chi_2} \otimes \mathbf{e}_{\chi_2} \\ &= \left(\int_{\Sigma} (\chi_1^2 + \chi_2^2) dS \right) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \left(\int_{\Sigma} \chi_2^2 dS \right) \mathbf{e}_{\chi_1} \otimes \mathbf{e}_{\chi_1} + \left(\int_{\Sigma} \chi_1^2 dS \right) \mathbf{e}_{\chi_2} \otimes \mathbf{e}_{\chi_2} \end{aligned}$$

où l'on note que les différentes inerties principales vérifient systématiquement la propriété suivante :

$$I_e = I_{\chi_1} + I_{\chi_2}$$

Il est ainsi possible de projeter la relation de comportement pour le moment de façon à relier chacune de ses composantes aux quantités cinématiques associées. Ainsi, pour un modèle de poutre de Timoshenko, on obtient :

$$\begin{aligned} M_e &= \mu I_e \theta'_e \\ M_{\chi_1} &= EI_{\chi_1} \theta'_{\chi_1} \\ M_{\chi_2} &= EI_{\chi_2} \theta'_{\chi_2} \end{aligned}$$

et si, de plus, on adopte l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, on parvient à établir pour une poutre droite que :

$$\begin{aligned} M_e &= \mu I_e \theta'_e \\ M_{\chi_1} &= -EI_{\chi_1} u''_{G\chi_2} \\ M_{\chi_2} &= EI_{\chi_2} u''_{G\chi_1} \end{aligned}$$

Il est ainsi possible de découpler les différentes relations de comportement : torsion autour de $\mathbf{e}$, flexion autour de $\mathbf{e}_{\chi_1}$, et flexion autour de $\mathbf{e}_{\chi_2}$.

R Comme précisé plus haut, dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli en statique, l'effort tranchant se détermine à partir de l'équation d'équilibre en moment :

$$\mathbf{R}_\Sigma = \mathbf{e} \wedge (\mathbf{c}_L + \mathbf{M}')$$

Avec la relation de comportement que l'on vient de préciser pour le moment de flexion, on peut donc établir, pour une poutre droite, que :

$$\mathbf{R}_\Sigma = \mathbf{e} \wedge (\mathbf{c}_L + E\mathbb{J}(\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'''_{G\Sigma}))$$

ou, dans la base $(\mathbf{e}_{\chi_1}, \mathbf{e}_{\chi_2})$ associée à la section :

$$T_{\chi_1} = -EI_{\chi_2} u'''_{G\chi_1} - c_{L\chi_2}$$

$$T_{\chi_2} = -EI_{\chi_1} u'''_{G\chi_2} + c_{L\chi_1}$$

ce qui peut se réécrire vectoriellement sous une forme plus compacte :

$$\mathbf{R}_\Sigma = -E\mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P}\mathbf{u}'''_{G\Sigma} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{c}_L$$

où $\mathbb{P} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{e}_{\chi_1} \otimes \mathbf{e}_{\chi_2} + \mathbf{e}_{\chi_2} \otimes \mathbf{e}_{\chi_1}$ permet de permuter les axes $\mathbf{e}_{\chi_1}$ et $\mathbf{e}_{\chi_2}$, de façon à avoir :

$$\mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P} = I_e \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + I_{\chi_2} \mathbf{e}_{\chi_1} \otimes \mathbf{e}_{\chi_1} + I_{\chi_1} \mathbf{e}_{\chi_2} \otimes \mathbf{e}_{\chi_2}$$

Dans le cadre dynamique, il faut prendre en compte le terme d'inertie associé à la rotation de flexion, soit, vu que $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_\Sigma = \mathbf{e} \wedge \ddot{\mathbf{u}}'_{G\Sigma}$:

$$\mathbf{R}_\Sigma = -E\mathbb{P}\mathbb{J}\mathbb{P}\mathbf{u}'''_{G\Sigma} + \mathbf{e} \wedge (\mathbf{c}_L - \rho\mathbb{J}(\mathbf{e} \wedge \ddot{\mathbf{u}}'_{G\Sigma}))$$

■ **Exemple 6.7 — Tenseur d'inertie de différentes sections classiques.** On considère ici une poutre d'axe $\mathbf{i}_x$, pour laquelle on détaille le calcul du tenseur d'inertie pour différents exemples de sections que l'on rencontre fréquemment en pratique.

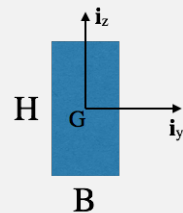
Section rectangulaire

On suppose que la section est rectangulaire, de dimensions respectives B et H selon les axes $\mathbf{i}_y$ et $\mathbf{i}_z$ qui forment une base cartésienne de la section. Ces derniers étant des axes de symétrie de la géométrie de la section, le tenseur d'inertie géométrique est alors diagonal dans cette base, et peut s'écrire comme :

$$\mathbb{J} = I_x \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x + I_y \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_y + I_z \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z$$

avec :

$$I_y = \int_{\Sigma} z^2 dS = \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-H/2}^{H/2} z^2 dz dy = B \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-H/2}^{H/2} = \frac{BH^3}{12}$$



et :

$$I_z = \int_{\Sigma} y^2 dS = \int_{-H/2}^{H/2} \int_{-B/2}^{B/2} y^2 dy dz = H \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-B/2}^{B/2} = \frac{HB^3}{12}$$

Par conséquent, l'inertie polaire de la section vaut :

$$I_x = I_y + I_z = \frac{BH^3}{12} + \frac{HB^3}{12} = \frac{BH}{12} (H^2 + B^2)$$

Section circulaire

On suppose maintenant que la section est circulaire de rayon R ; on peut alors considérer n'importe quel repère cylindrique $(G, \mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_x)$, centré dans la section, pour calculer le tenseur d'inertie de section, qui, ici, est tel que :



$$\mathbb{J} = \int_{\Sigma} (\|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x}_{\Sigma} \otimes \mathbf{x}_{\Sigma}) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R (\|\mathbf{r}_i(\theta)\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{r}_i(\theta) \otimes \mathbf{r}_i(\theta)) r dr d\theta$$

vu que $\mathbf{x}_{\Sigma} = \mathbf{r}_i(\theta)$ ici. On obtient alors :

$$\mathbb{J} = 2\pi \int_0^R r^3 dr \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x + \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(\theta) d\theta$$

Si la base cylindrique est telle que $(\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_x) = (\mathbb{R}\mathbf{i}_y, \mathbb{R}\mathbf{i}_z, \mathbf{i}_x)$, où $\mathbb{R}$ est la rotation d'axe $\mathbf{i}_x$ et d'angle θ , et la base $(\mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z, \mathbf{i}_x)$ est cartésienne, on vérifie facilement que :

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(\theta) d\theta = \pi(\mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z)$$

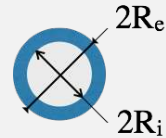
ce qui implique finalement que :

$$\mathbb{J} = \pi \frac{R^4}{2} \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x + \pi \frac{R^4}{4} \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_y + \pi \frac{R^4}{4} \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z$$

où l'on retrouve notamment que $I_x = I_y + I_z$.

Section annulaire

On considère maintenant une section creuse en forme d'anneau, de rayons intérieur R_i et extérieur R_e . Une façon simple de calculer le tenseur d'inertie associé est de considérer que la section s'obtient comme la « soustraction » d'une section circulaire Σ_i de rayon R_i à une section circulaire Σ_e de rayon R_e :



$$\mathbb{J} = \int_{\Sigma_e \setminus \Sigma_i} (\|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x}_{\Sigma} \otimes \mathbf{x}_{\Sigma}) dS = \int_{\Sigma_e} (\|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x}_{\Sigma} \otimes \mathbf{x}_{\Sigma}) dS - \int_{\Sigma_i} (\|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x}_{\Sigma} \otimes \mathbf{x}_{\Sigma}) dS$$

ce qui permet d'obtenir directement :

$$\mathbb{J} = \pi \frac{R_e^4 - R_i^4}{2} \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x + \pi \frac{R_e^4 - R_i^4}{4} \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_y + \pi \frac{R_e^4 - R_i^4}{4} \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z$$

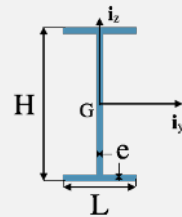
De plus, si l'épaisseur $e = R_e - R_i$ est très petite devant les rayons $R_i \approx R_e \approx R$, on obtient, à l'ordre un en e/R :

$$\mathbb{J} = 2\pi e R^3 \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x + \pi e R^3 \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_y + \pi e R^3 \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z$$

Section profilée en « I »

On considère ici un profil de section très répandu dans le domaine de la construction, à savoir un profil en « I », qui se compose de deux « semelles » horizontales et symétriques, de largeur L et d'épaisseur e , reliées par une « âme » verticale, de hauteur H et d'épaisseur e . On peut alors décomposer ce profil à l'aide de trois sections de formes élémentaires :

- une section rectangulaire Σ_1 de largeur L selon $\mathbf{i}_y$ et de hauteur H selon $\mathbf{i}_z$;
- une section rectangulaire Σ_2 de largeur L selon $\mathbf{i}_y$ et de hauteur $H - 2e$ selon $\mathbf{i}_z$;
- une section rectangulaire Σ_3 d'épaisseur e selon $\mathbf{i}_y$ et de hauteur $H - 2e$ selon $\mathbf{i}_z$.



Le profil en « I » étudié correspond donc à $\Sigma = (\Sigma_1 \setminus \Sigma_2) \cup \Sigma_3$, et le tenseur d'inertie associé est alors simplement :

$$\mathbb{J} = I_x \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x + I_y \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_y + I_z \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z$$

avec :

$$I_y = \frac{LH^3}{12} - \frac{L(H-2e)^3}{12} + \frac{e(H-2e)^3}{12} \approx \frac{eH^2}{12}(H+6L)$$

si l'on suppose que l'épaisseur e est petite devant les dimensions transversales H et L , et, de façon similaire :

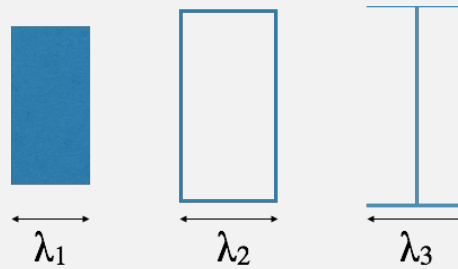
$$I_z = \frac{HL^3}{12} - \frac{(H-2e)L^3}{12} + \frac{(H-2e)e^3}{12} \approx \frac{eL^3}{6}$$

ainsi que, finalement :

$$I_x = I_y + I_z \approx \frac{e}{12} (H^3 + 6H^2L + 2L^3)$$

Ce profil de section est très utilisé dans le cas de poutres soumises à des sollicitations de flexion : en effet, une poutre est d'autant plus rigide vis-à-vis de telles sollicitations que le moment de section associé est grand. Comparons la géométrie de trois sections de formes différentes, mais qui présentent la même inertie I_y :

1. une poutre de section rectangulaire, de dimensions λ_1 selon $\mathbf{i}_y$ et $2\lambda_1$ selon $\mathbf{i}_z$;
2. une poutre creuse de section rectangulaire, de dimensions externes λ_2 selon $\mathbf{i}_y$ et $2\lambda_2$ selon $\mathbf{i}_z$, et d'épaisseur $\lambda_2/10$;
3. une poutre de section profilée en « I », avec comme dimensions $L = \lambda_3$, $H = 2\lambda_3$ et $e = \lambda_3/10$.



Le tableau ci-dessous répertorie pour ces trois sections les dimensions permettant d'obtenir une inertie I_y identique dans les trois cas (égale à 100 cm^4), ainsi que les aires associées : on constate alors que la section profilée en « I » est celle d'aire minimale, ce qui signifie qu'elle est la plus optimale des trois au sens du rapport rigidité en flexion / masse requise, ce qui explique qu'elle soit très répandue.

	Section pleine	Section creuse	Section en « I »
Dimension	$\lambda_1 = 3,5 \text{ cm}$	$\lambda_2 = 4,2 \text{ cm}$	$\lambda_3 = 4,4 \text{ cm}$
Aire	$A_1 = 2\lambda_1^2 = 24,5 \text{ cm}^2$	$A_2 = \frac{3}{5}\lambda_2^2 = 10,4 \text{ cm}^2$	$A_3 = \frac{2}{5}\lambda_3^2 = 7,7 \text{ cm}^2$
Inertie	$I_{y1} = \frac{2}{3}\lambda_1^4 = 100 \text{ cm}^4$	$I_{y2} = \frac{\lambda_2^4}{3} = 100 \text{ cm}^4$	$I_{y3} = \frac{4}{15}\lambda_3^4 = 100 \text{ cm}^4$

Section profilée en « L »

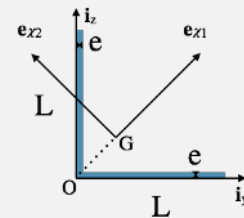
On considère enfin un dernier profil de section, utilisé dans le domaine de la construction, à savoir un profil en « L » composé de deux « ailes » perpendiculaires, de directions respectives $\mathbf{i}_y$ et $\mathbf{i}_z$, de longueur L et d'épaisseur e . La forme même de ce profil implique un certain nombre de précautions qui sont détaillées ci-dessous.

La première étape consiste à déterminer le centre de la section ; le calcul associé permet d'aboutir à :

$$y_G = \frac{L^2 + Le - e^2}{4L - 2e} = z_G$$

si l'on a placé l'origine O du repère $(O, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$ au sommet extérieur de la cornière. Si, comme c'est le cas en pratique, on suppose que $e \ll L$, on trouve alors la position suivante :

$$y_G = z_G \approx \frac{L}{4}$$



La seconde étape est le calcul du tenseur d'inertie de la section exprimé au point G ; on arrive alors à :

$$\mathbb{J} = I_x \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x + I_y \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_y + I_z \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z - I_{yz} (\mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_z + \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_y)$$

avec :

$$I_y = I_z = \frac{e}{12} \frac{(5L^2 - 5Le + e^2)(L^2 - Le + e^2)}{2L - e} \approx \frac{5}{24} eL^3$$

et :

$$I_x = I_y + I_z = \frac{e}{6} \frac{(5L^2 - 5Le + e^2)(L^2 - Le + e^2)}{2L - e} \approx \frac{5}{12} eL^3$$

ainsi que :

$$I_{yz} = \frac{e}{4} \frac{L^2(L - e)^2}{2L - e} \approx \frac{eL^3}{8}$$

quand $e \ll L$. Ainsi, le produit d'inertie I_{yz} n'est pas nul, ce qui signifie que les axes $\mathbf{i}_y$ et $\mathbf{i}_z$ ne sont pas axes principaux d'inertie.

Afin de faciliter les calculs de flexion, il est intéressant de travailler avec les directions principales du tenseur d'inertie de section ; pour cela, on constate que la bissectrice de $(\mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$ est un axe de symétrie de la géométrie de la section, et, par conséquent, axe principal d'inertie, noté $\mathbf{e}_{\chi_1}$. La seconde direction principale est alors donnée par $\mathbf{e}_{\chi_2} = \mathbf{i}_x \wedge \mathbf{e}_{\chi_1}$. Dans cette base, le tenseur d'inertie s'exprime maintenant comme un tenseur diagonal :

$$\mathbb{J} = I_x \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x + I_{\chi_1} \mathbf{e}_{\chi_1} \otimes \mathbf{e}_{\chi_1} + I_{\chi_2} \mathbf{e}_{\chi_2} \otimes \mathbf{e}_{\chi_2}$$

avec :

$$I_{\chi_1} = \frac{e}{12} (2L - e)(2L^2 - 2Le + e^2) \approx \frac{eL^3}{3}$$

et :

$$I_{\chi_2} = \frac{e}{12} \frac{2L^4 - 4L^3e + 8L^2e^2 - 6Le^3 + e^4}{2L - e} \approx \frac{eL^3}{12}$$

quand $e \ll L$, ainsi que :

$$I_x = I_{\chi_1} + I_{\chi_2} = \frac{e}{6} \frac{(5L^2 - 5Le + e^2)(L^2 - Le + e^2)}{2L - e} \approx \frac{5}{12} eL^3$$

D'autres exemples de sections peuvent être trouvés dans [CT87]. ■

R Dans le cas où la section n'est pas circulaire, on a vu dans l'exemple 5.3 (page 130) que les sections ne demeuraient pas planes lors d'une sollicitation de torsion, et que ce phénomène de gauchissement diminuait la rigidité à la torsion de la poutre considérée. Pour en tenir compte, on remplace l'inertie polaire de section « sans gauchissement » I_e par son homologue J définie dans l'exemple 5.6 (page 140) comme :

$$J = I_e + \left\langle \mathbf{e}, \int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge \nabla_{\mathbf{x}_{\Sigma}} \varphi dS_x \right\rangle$$

où $\varphi(\mathbf{x}_{\Sigma})$ est la fonction de gauchissement, obtenue en résolvant sur la section :

$$\Delta_{\mathbf{x}_{\Sigma}} \varphi = 0$$

avec, comme condition aux limites sur le contour de la section :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \langle \mathbf{x}_{\Sigma}, \mathbf{t}_l \rangle$$

où $\mathbf{t}_l$ est le vecteur tangent au contour.

■ **Exemple 6.8 — Déformée d'une cheminée soumise au vent.** On cherche à déterminer ici le déplacement des points de la cheminée, en partant de la connaissance de la résultante et du moment des efforts intérieurs le long de la ligne moyenne.

La première relation de comportement permet de relier l'effort normal au déplacement longitudinal des centres de section, et s'écrit ici :

$$EAu'_{Gz}(z) = R_z(z) = \rho g \pi (r_e^2 - r_i^2)(z - H), \quad \forall z \in [0, H]$$

avec $A = \pi (r_e^2 - r_i^2)$, ce qui implique que :

$$u_{Gz}(z) = \frac{\rho g}{2E} (z^2 - 2Hz)$$

vu que la constante d'intégration est nulle en vertu de la condition aux limites en $z = 0$:

$$u_{Gz}(0) = 0$$

la section d'altitude $z = 0$ étant posée sur le sol, fixe et indéformable, sans possibilité de mouvement relatif. Le tassement de la cheminée ($u_{Gz} \leq 0$, $\forall z$) évolue donc de façon quadratique en fonction de l'altitude.

La seconde relation de comportement relie le moment de torsion à l'angle de torsion des sections, et s'écrit ici :

$$\mu I_z \theta'_z(z) = M_z(z) = 0, \forall z \in [0, H]$$

ce qui permet de conclure que :

$$\theta_z(z) = C = 0$$

vu que, comme la section d'altitude $z = 0$ est fixe, sa rotation est nulle. Il n'y a donc pas de torsion au sein de la cheminée.

La troisième relation de comportement relie, en vertu de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, le moment de flexion au déplacement transverse de la ligne moyenne :

$$EI_y \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{u}_{G\Sigma}''(z) = M_y(z) \mathbf{i}_y = \frac{K\pi r_e}{24} (z^4 - 4H^3z + 3H^4) \mathbf{i}_y$$

En prenant le produit vectoriel de cette équation par $\mathbf{i}_z$, on obtient :

$$EI_y \mathbf{u}_{G\Sigma}''(z) = \frac{K\pi r_e}{24} (z^4 - 4H^3z + 3H^4) \mathbf{i}_x$$

ce qui donne, après deux intégrations successives :

$$\mathbf{u}_{G\Sigma}(z) = \frac{K\pi r_e}{720EI_y} (z^6 - 20H^3z^3 + 45H^4z^2) \mathbf{i}_x + \mathbf{C}_1 z + \mathbf{C}_2$$

où $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ sont deux vecteurs constants à déterminer à l'aide des conditions aux limites en $z = 0$: le fait que la cheminée soit fixée au sol sans possibilité de mouvement relatif revient à exprimer que le déplacement transverse est nul :

$$\mathbf{u}_{G\Sigma}(0) = \mathbf{0}, \text{ d'où } \mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$$

et que la rotation de la section est nulle également, ce qui implique, par l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, que c'est la dérivée du déplacement transverse qui est nulle en $z = 0$:

$$\mathbf{u}_{G\Sigma}'(0) = \mathbf{0}, \text{ d'où } \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$$

et finalement, la ligne moyenne vérifie le déplacement transverse suivant :

$$\mathbf{u}_{G\Sigma}(z) = \frac{K\pi r_e}{720EI_y} (z^6 - 20H^3z^3 + 45H^4z^2) \mathbf{i}_x$$

Ainsi, le déplacement de la ligne moyenne vaut :

$$\mathbf{u}_G(z) = \frac{K\pi r_e}{720EI_y} (z^6 - 20H^3z^3 + 45H^4z^2) \mathbf{i}_x + \frac{\rho g}{2E} (z^2 - 2Hz) \mathbf{i}_z$$

ce qui détermine entièrement le déplacement de l'ensemble des points de la poutre, vu que les sections restent perpendiculaires à la ligne moyenne déformée en vertu de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, qui s'explique comme :

$$\boldsymbol{\theta}_\Sigma(z) = \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{u}_{G\Sigma}'(z) = u_{Gx}'(z) \mathbf{i}_y = \frac{K\pi r_e}{120EI_y} (z^5 - 10H^3z^2 + 15H^4z) \mathbf{i}_y$$

En conclusion, un point M de coordonnées (x, y, z) dans la base cartésienne $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z)$ vérifie le déplacement suivant :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x, y, z) &= \mathbf{u}_G(z) + \boldsymbol{\theta}(z) \wedge (x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y) \\ &= u_{Gx}(z)\mathbf{i}_x + u_{Gz}(z)\mathbf{i}_z - yu'_{Gx}(z)\mathbf{i}_z \\ &= \frac{K\pi r_e}{720EI_y} (z^6 - 20H^3z^3 + 45H^4z^2 - y(6z^5 - 60H^3z^2 + 90H^4z))\mathbf{i}_x \\ &\quad + \frac{\rho g}{2E} (z^2 - 2Hz)\mathbf{i}_z\end{aligned}$$

R Les caractéristiques de la section (aire et tenseur d'inertie) peuvent évoluer le long de la ligne moyenne sans que la validité des relations de comportement concernant la résultante et le moment des efforts intérieurs ne soit remise en cause : dans ce cas, ces caractéristiques deviennent alors des fonctions de l'abscisse curviligne s .

6.3.4 Estimation des contraintes dans la section

On vient de voir comment relier les efforts intérieurs à la cinématique d'une poutre, en utilisant les relations locales entre déformations et contraintes ; inversement, il est possible d'utiliser de nouveau ces relations, afin de faire le lien entre les contraintes locales dans la section, et les efforts intérieurs représentés par la résultante et le moment des actions sur une section.

En effet, on peut établir à l'aide des relations du paragraphe 6.3.1 que le vecteur contrainte dans la section Σ d'abscisse s peut s'écrire comme :

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e} = \sigma_{ee}\mathbf{e} + \boldsymbol{\tau}_\Sigma = E\varepsilon_{ee}\mathbf{e} + \mu\boldsymbol{\gamma}_\Sigma$$

avec $\varepsilon_{ee} = u'_{Ge} + \langle \boldsymbol{\theta}'_\Sigma \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \rangle$ et $\boldsymbol{\gamma}_\Sigma = \mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_\Sigma \wedge \mathbf{e} + \boldsymbol{\theta}'_e \wedge \mathbf{x}_\Sigma$ si l'on ne tient pas compte pour l'instant de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

Il suffit ensuite de remplacer chaque grandeur cinématique par les composantes associées des résultante et moment des efforts intérieurs, à l'aide des relations établies dans les paragraphes 6.3.2 et 6.3.3. Ainsi, la contrainte normale σ_{ee} est telle que :

$$\sigma_{ee} = E(u'_{Ge} + \langle \boldsymbol{\theta}'_\Sigma \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \rangle)$$

et on peut injecter dans cette équation les relations :

$$R_e = EAu'_{Ge}, \text{ et } \mathbf{M}_\Sigma = E\mathbb{J}\boldsymbol{\theta}'_\Sigma$$

après les avoir inversées (vu que, notamment, le tenseur d'inertie $\mathbb{J}$ est inversible), pour obtenir que :

$$\sigma_{ee} = E \left(\frac{R_e}{EA} + \left\langle \frac{1}{E}\mathbb{J}^{-1}\mathbf{M}_\Sigma \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \right\rangle \right)$$

ce qui permet d'aboutir finalement à :

$$\sigma_{ee} = \frac{R_e}{A} + \langle \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \wedge \mathbb{J}^{-1}\mathbf{M}_\Sigma \rangle$$

La contrainte normale σ_{ee} s'exprime donc comme la somme de deux termes :

- le premier, constant dans la section, résulte de l'effort de traction (ou de compression) $N = R_e$ appliqué selon l'axe de la poutre ;
- le second, linéaire selon les deux directions $\mathbf{e}_{\chi_1}$ et $\mathbf{e}_{\chi_2}$ de la section, est lié aux deux composantes du moment de flexion $\mathbf{M}_f = \mathbf{M}_\Sigma$ suivant ces deux axes.

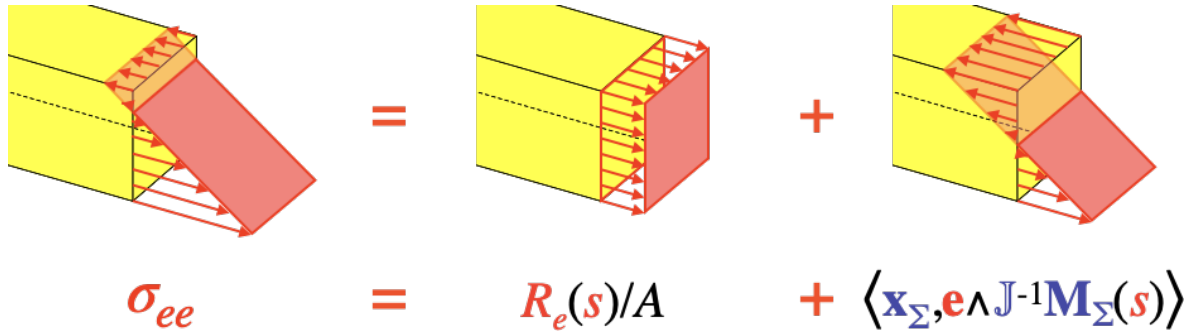


FIGURE 6.16 – Variation de la contrainte normale σ_{ee} dans une section donnée : effets cumulés de la traction et de la flexion.

Ainsi, on constate que la contrainte normale est affine dans la section, comme illustré sur la figure 6.16, où l'on n'a considéré que la flexion selon le plan vertical, en plus de la traction.

De façon similaire, le cisaillement τ_Σ peut s'exprimer comme :

$$\tau_\Sigma = \mu (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_\Sigma \wedge \mathbf{e} + \theta'_e \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma)$$

et en injectant dans cette équation les relations suivantes, préalablement inversées :

$$\mathbf{R}_\Sigma = \mu A (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_\Sigma \wedge \mathbf{e}), \text{ et } M_e = \mu I_e \theta'_e$$

on aboutit finalement à :

$$\tau_\Sigma = \frac{1}{A} \mathbf{R}_\Sigma + \frac{M_e}{I_e} \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma$$

Ainsi, le cisaillement s'exprime comme la conjonction de deux effets :

- le premier, associé à la flexion, correspond au cisaillement transverse, homogène dans la section, et qui traduit le fait que cette dernière ne reste pas perpendiculaire à la ligne moyenne déformée ;
- le second, linéaire en fonction des distances depuis le centre de la section, est associé à la torsion, comme représenté sur la figure 6.17.

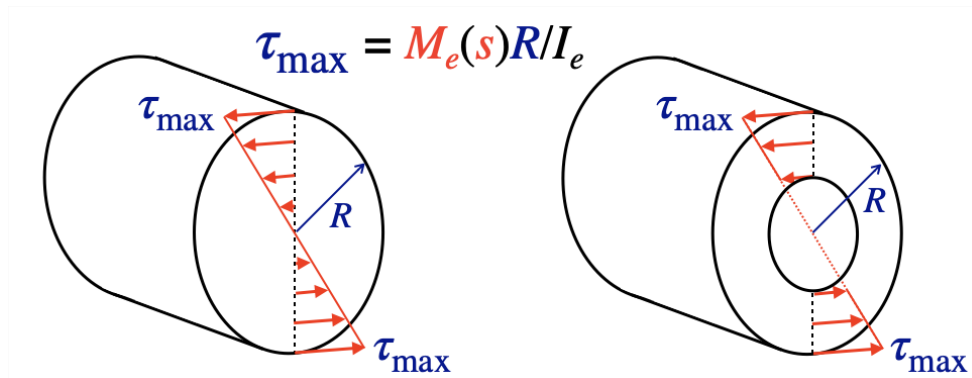


FIGURE 6.17 – Variation du cisaillement τ_Σ lié à la torsion, dans le cas d'une section circulaire.

Résumé 6.11 — Vecteur contrainte dans une section. Dans le cas général, le vecteur contrainte dans une section Σ d'abscisse s peut s'exprimer, en fonction des composantes des résultante et moment des efforts intérieurs, comme :

$$\sigma \mathbf{e} = \sigma_{ee}(s, t) \mathbf{e} + \boldsymbol{\tau}_{\Sigma}(s, t) = \left(\frac{R_e(s, t)}{A} + \langle \mathbf{x}_{\Sigma}, \mathbf{e} \wedge \mathbb{J}^{-1} \mathbf{M}_{\Sigma}(s, t) \rangle \right) \mathbf{e} + \frac{1}{A} \mathbf{R}_{\Sigma}(s, t) + \frac{M_e(s, t)}{I_e} \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma}, \forall t$$

où A est l'aire de la section, et I_e l'inertie polaire de section.

R Comme l'ensemble des équations permettant de résoudre un problème de poutre sont linéaires, il est possible d'utiliser le principe de superposition (déjà évoqué au paragraphe 5.3.1) afin de décomposer le problème traité en une combinaison linéaire de problèmes plus simples.

En outre, comme les différentes relations de comportement sont découplées dans le cas d'une poutre droite, il est possible, lorsque la poutre est soumise à différentes sollicitations, de traiter séparément les problèmes de traction-compression, de flexion et de torsion, puis de combiner les différentes solutions (déplacements, efforts intérieurs, contraintes) pour obtenir la solution du problème initial. C'est notamment ce qu'illustre la figure 6.16, où la contrainte normale est obtenue comme la somme de la contrainte associée à la traction et de celle associée à la flexion.

■ **Exemple 6.9 — Contraintes dans une cheminée soumise au vent.** À partir des résultante et moment des efforts intérieurs déterminés dans les exemples 6.4 et 6.6, on peut estimer la contrainte normale en chaque point de coordonnées (x, y, z) comme :

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = \frac{R_z(z)}{A} + \langle x \mathbf{i}_x + y \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z \wedge \mathbb{J}^{-1} \mathbf{M}_{\Sigma}(z) \rangle$$

avec :

$$A = \pi (r_e^2 - r_i^2), \text{ et } \mathbb{J} = \pi \frac{r_e^4 - r_i^4}{4} (\mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_y + 2 \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z)$$

ainsi que :

$$R_z(z) = -\rho g \pi (r_e^2 - r_i^2) (H - z)$$

$$\mathbf{M}_{\Sigma}(z) = \frac{K \pi r_e}{24} (z^4 - 4H^3 z + 3H^4) \mathbf{i}_y$$

ce qui permet d'aboutir à :

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = -\rho g (H - z) - \frac{K r_e}{6(r_e^4 - r_i^4)} (z^4 - 4H^3 z + 3H^4) x$$

Ainsi, pour une section d'altitude z donnée, la contrainte axiale évolue linéairement entre les deux valeurs extrêmes :

$$\sigma_{zz \min/\max} = -\rho g (H - z) \mp \frac{K r_e^2}{6(r_e^4 - r_i^4)} (z^4 - 4H^3 z + 3H^4)$$

et la section la plus sollicitée est celle en contact avec le sol, en $z = 0$, pour laquelle la contrainte maximale est, en valeur absolue :

$$|\sigma_{zz}|_{\max} = \rho g H + \frac{K r_e^2 H^4}{2(r_e^4 - r_i^4)}$$

située en $x = r_e$. La contrainte de cisaillement vaut, quant à elle :

$$\boldsymbol{\tau}_{\Sigma}(z) = \frac{1}{A} \mathbf{R}_{\Sigma}(z) = \frac{K r_e}{6(r_e^2 - r_i^2)} (H^3 - z^3) \mathbf{i}_x$$

et est négligeable par rapport à la contrainte normale quand $r_e \ll H$. ■

R On peut montrer que, dans le cas de la flexion (sans torsion) :

$$\frac{\|\boldsymbol{\tau}_{\Sigma}\|}{|\sigma_{ee}|} = O\left(\frac{H}{L}\right)$$

où H est un ordre de grandeur des dimensions transverses de la poutre. La contrainte de cisaillement est donc d'autant plus négligeable par rapport à la contrainte normale que la poutre est « mince », et il est alors fréquent de la négliger quand on adopte l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

6.4 Liaisons entre poutres

Afin de pouvoir aborder des problèmes où de multiples poutres sont assemblées les unes aux autres, une première étape passe par la description des liaisons qui peuvent être proposées pour ces assemblages, notamment en termes de cinématique et d'actions transmissibles.

6.4.1 Cinématique associée à une liaison

Toute liaison mise en place entre une poutre Ω et un autre corps Ω^* (bâti, solide indéformable, ou autre poutre) autorise, vis-à-vis de la section Σ de Ω concernée, un certain nombre de mouvements relatifs par rapport à l'autre corps, à savoir, comme la section Σ est indéformable :

- trois mouvements élémentaires de translation du centre G de la section Σ ;
- trois mouvements élémentaires de rotation de la section Σ .

Dans ce qui suit, on va supposer que ces mouvements élémentaires restent « petits », ce qui permet de rester dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations, et, notamment, de confondre les configurations initiale et actuelle.

Ainsi, on suppose que le placement des points du corps Ω^* (ou d'une sous-partie, comme l'une de ses sections s'il s'agit d'une poutre) vérifie :

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_A + \mathbb{r}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_A)$$

où A est un point donné de Ω^* , et $\mathbb{r} = \mathbb{I} + \boldsymbol{\alpha}^\wedge$ est la « petite » rotation associée à Ω^* , comme définie dans l'annexe A.2.6. De façon plus usuelle, on va plutôt s'intéresser au déplacement des points de Ω^* (ou d'une sous-partie), en adoptant de plus l'hypothèse des petites perturbations permettant de confondre les configurations initiale et actuelle :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_A + \boldsymbol{\alpha} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A)$$

où $\mathbf{u}_A$ est le déplacement du point A , et $\boldsymbol{\alpha}$ est le vecteur de « petite » rotation associé au tenseur antisymétrique $\boldsymbol{\alpha}^\wedge$.

Quatre sortes de liaisons se rencontrent couramment dans le cas des poutres : elles sont détaillées dans ce qui suit.

Liaison encastrement

La première liaison considérée est la liaison complète, ou encastrement, qui n'autorise aucun mouvement relatif entre Ω et Ω^* . Ainsi, le déplacement $\mathbf{u}$ des points de la section Σ (indéformable) de Ω au niveau de laquelle se trouve la liaison encastrement est entièrement déterminé par l'expression du déplacement des points de Ω^* :

$$\mathbf{u}_G + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_\Sigma = \mathbf{u} = \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_A + \boldsymbol{\alpha} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A) + \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{x}_\Sigma$$

soit, par identification terme à terme :

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_A + \boldsymbol{\alpha} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A), \text{ et } \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\alpha}$$

Dans le cas particulier où Ω^* est un bâti indéformable et fixe, les déplacements de tous les points de la section Σ sont alors nuls, soit, plus précisément :

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{0}, \text{ et } \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$

Si l'on adopte de plus l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, qui revient à supposer que $\mathbf{u}'_{G\Sigma} = \boldsymbol{\theta}_\Sigma \wedge \mathbf{e}$, ceci implique alors que :

$$\mathbf{u}'_{G\Sigma} = \mathbf{0}$$

Dans le cas, tout aussi courant, où Ω^* est une autre poutre (de section Σ^* concernée par la liaison), la liaison encastrement entre les deux poutres implique que les déplacements des centres des deux sections d'une part, et les rotations des deux sections d'autre part, soient les mêmes. De plus, si la liaison encastrement n'est pas réalisée par une pièce intermédiaire, ceci revient à supposer que les deux lignes moyennes sont sécantes au niveau d'un point G commun aux deux poutres, impliquant alors, avec des notations évidentes pour distinguer les expressions relatives aux deux poutres, que :

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^*, \text{ et } \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*$$

Ceci est bien sûr une schématisation de la réalité, vu qu'une telle liaison entre les deux poutres ne peut se faire qu'au niveau d'un certain domaine volumique (un cube, par exemple, pour deux poutres perpendiculaires, de sections carrées de mêmes dimensions transversales), qui n'a pas de raison de vérifier rigoureusement les hypothèses de cinématique des poutres. Si les dimensions des sections sont petites par rapport aux longueurs des poutres, on considérera que cette approximation est tout de même licite.

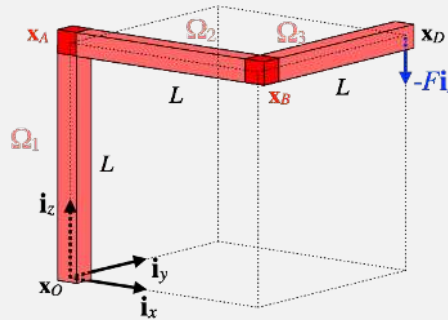
Si, de plus, on adopte pour les deux poutres l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, qui revient à supposer que $\boldsymbol{\theta}_\Sigma = \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma}$ et $\boldsymbol{\theta}_{\Sigma^*} = \mathbf{e}^* \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma^*}$, on peut alors écrire que :

$$\theta_e \mathbf{e} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma} = \theta_{e^*} \mathbf{e}^* + \mathbf{e}^* \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma^*}$$

où $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}^*$ sont les axes respectifs des poutres Ω et Ω^* .

■ **Exemple 6.10 — Conditions de raccords cinématiques dans un portique.** On considère ici un portique constitué de trois poutres Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 de même longueur, et orientées respectivement selon les trois directions d'une base cartésienne ($\mathbf{i}_z, \mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y$) :

- l'abscisse le long de la poutre Ω_1 évolue de $z = 0$ au point O jusqu'à $z = L$ au point A ;
- l'abscisse le long de la poutre Ω_2 évolue de $x = 0$ au point A jusqu'à $x = L$ au point B ;
- l'abscisse le long de la poutre Ω_3 évolue de $y = 0$ au point B jusqu'à $y = L$ au point D .



La première poutre Ω_1 est encastree au niveau de la section de centre O sur un bâti rigide et fixe, ce qui permet donc d'écrire en $z = 0$ que :

$$\mathbf{u}_G^{\textcircled{D}}(0) = \mathbf{0}, \text{ et } \boldsymbol{\theta}^{\textcircled{D}}(0) = \mathbf{0}$$

En outre, si l'on adopte l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, la condition en $z = 0$ sur la rotation devient :

$$\theta_z^{\textcircled{D}}(0) \mathbf{i}_z + \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{u}_G^{\textcircled{D}}(0) = \mathbf{0}$$

La seconde poutre Ω_2 est encastree sur la précédente au niveau du point A commun aux lignes moyennes des

deux poutres, c'est-à-dire en $z = L$ pour la poutre Ω_1 et en $x = 0$ pour la poutre Ω_2 :

$$\mathbf{u}_G^{(1)}(L) = \mathbf{u}_G^{(2)}(0), \text{ et } \boldsymbol{\theta}^{(1)}(L) = \boldsymbol{\theta}^{(2)}(0)$$

En outre, si l'on adopte l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, la condition en $z = L$ et $x = 0$ sur les rotations devient :

$$\theta_z^{(1)}(L)\mathbf{i}_z + \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{u}_{G\Sigma}^{(1)'}(L) = \theta_x^{(2)}(0)\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_x \wedge \mathbf{u}_{G\Sigma}^{(2)'}(0)$$

ce qui conduit aux relations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} -u_{Gy}^{(1)'}(L) = \theta_x^{(2)}(0) \\ u_{Gx}^{(1)'}(L) = -u_{Gz}^{(2)'}(0) \\ \theta_z^{(1)}(L) = u_{Gy}^{(2)'}(0) \end{cases}$$

Enfin, la troisième poutre Ω_3 est encastree sur la précédente au niveau du point B commun aux lignes moyennes des deux poutres, c'est-à-dire en $x = L$ pour la poutre Ω_2 et en $y = 0$ pour la poutre Ω_3 :

$$\mathbf{u}_G^{(2)}(L) = \mathbf{u}_G^{(3)}(0), \text{ et } \boldsymbol{\theta}^{(2)}(L) = \boldsymbol{\theta}^{(3)}(0)$$

En outre, si l'on adopte l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, la condition en $x = L$ et $y = 0$ sur les rotations devient :

$$\theta_x^{(2)}(L)\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_x \wedge \mathbf{u}_{G\Sigma}^{(2)'}(L) = \theta_y^{(3)}(0)\mathbf{i}_y + \mathbf{i}_y \wedge \mathbf{u}_{G\Sigma}^{(3)'}(0)$$

conduisant à des relations scalaires similaires à celles écrites au point A . ■

Liaison sphérique

Une liaison sphérique (ou rotule) entre Ω et Ω^* permet d'autoriser toute rotation relative entre les deux corps : il s'agit généralement d'une « articulation », comme celles visibles sur la figure 6.18, et dont le jeu permet d'autoriser une rotation d'axe arbitraire. Ainsi, seul le déplacement du centre G de la section Σ de la poutre Ω , située au niveau de la liaison sphérique, est lié au déplacement du corps Ω^* au même point :

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^* = \mathbf{u}_A + \boldsymbol{\alpha} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A)$$

et la rotation $\boldsymbol{\theta}$ de la section Σ reste donc libre.



FIGURE 6.18 – Exemples de liaisons sphériques.

Dans le cas d'un bâti Ω^* indéformable et fixe, ceci revient à dire que le centre G de la section Σ concernée par la liaison est fixe :

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{0}$$

Dans le cas où ce sont deux poutres Ω^* et Ω qui sont reliées par une liaison sphérique, le point G d'intersection entre les deux lignes moyennes reste donc commun aux deux poutres, soit, avec des notations évidentes :

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^*$$

Liaison pivot

Par rapport au cas précédent, cette fois-ci la rotation relative autorisée entre Ω et Ω^* se fait autour d'un axe $\mathbf{a}$, comme cela est visible sur la figure 6.19. L'axe est supposé lié à Ω^* , ce qui implique que, en plus du déplacement du centre de section, les deux composantes du vecteur de rotation de la section Σ de Ω qui sont perpendiculaires à $\mathbf{a}$ (qui s'expriment comme $\boldsymbol{\theta} - \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a}$) sont également liées à l'expression du déplacement du corps Ω^* :

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_A + \boldsymbol{\alpha} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A), \text{ et } \boldsymbol{\theta} - \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} - \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a}$$

On peut donc écrire le déplacement d'un point de la section Σ comme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_\Sigma = \mathbf{u}_A + \boldsymbol{\alpha} \wedge (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A) + (\boldsymbol{\alpha} + \langle \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a}) \wedge \mathbf{x}_\Sigma$$

ce qui montre que la rotation autour de l'axe $\mathbf{a}$ reste libre.

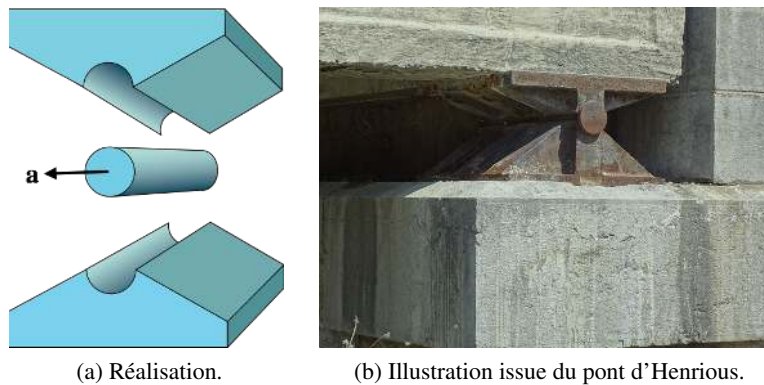


FIGURE 6.19 – Liaison pivot, dite de type « appui ».

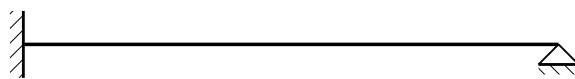
Si Ω^* est un bâti fixe et indéformable, dans ce cas, toutes les composante autres que la rotation de section autour de l'axe $\mathbf{a}$ sont nulles :

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{0}, \text{ et } \boldsymbol{\theta} - \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Enfin, dans le cas où la liaison pivot relie deux poutres Ω^* et Ω au niveau d'un même centre G de section, on peut écrire que :

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^*, \text{ et } \boldsymbol{\theta} - \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} = \boldsymbol{\theta}^* - \langle \boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a}$$

R Dans le cas où le problème traité est plan, de normale l'axe de la liaison pivot, on parle d'« appui », ou encore d'« articulation », pour désigner une telle liaison, qui est alors symbolisée par un triangle ; on obtient par exemple la représentation graphique suivante pour une poutre encastrée à une extrémité et appuyée à l'autre :



Il est à noter également qu'une liaison sphérique est assimilable à un appui si le problème considéré est plan.

Liaison sphère-cylindre

Cette liaison, qui se retrouve pratiquement exclusivement entre une poutre Ω et un bâti Ω^* fixe et indéformable, est illustrée sur la figure 6.20 : le coussin en élastomère est déformable (et suffisamment souple pour que l'on puisse négliger les efforts associés), et permet donc une rotation relative quelconque. On se retrouve dans le cas de la liaison sphérique, mais, cette fois-ci, avec une mobilité relative supplémentaire du centre de la section Σ en translation, permise par le dispositif de guidage, et toujours selon l'axe $\mathbf{e}$ de la poutre Ω . Ainsi, on a, dans le cas d'un bâti Ω^* fixe et indéformable :

$$\mathbf{u}_G - \langle \mathbf{u}_G, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

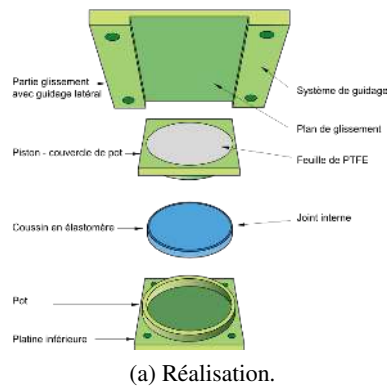
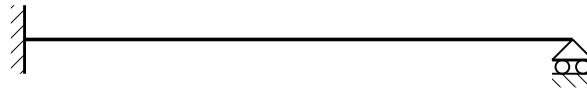


FIGURE 6.20 – Liaison sphère-cylindre, dite de type « appui glissant ».

R Dans le cas où le problème traité est plan, on parle d'« appui glissant » pour désigner une telle liaison, qui est symbolisée par un triangle sur deux rouleaux ; on obtient par exemple la représentation graphique suivante pour une poutre encastree à une extrémité et en appui glissant à l'autre :



Résumé 6.12 — Paramètres cinématiques de la section d'une poutre Ω en liaison avec un corps Ω^* .

Liaisons (Ω/Ω^*)	Cas d'un bâti Ω^* fixe	Cas d'une poutre Ω^*
Articulation ou appui (2D)	$\mathbf{u}_G = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^*$ (dans le plan)
Appui glissant (2D)	$\mathbf{u}_G - \langle \mathbf{u}_G, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} = \mathbf{0}$	non rencontré en pratique
Encastrement	$\mathbf{u}_G = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^*, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*$
Pivot (d'axe $\mathbf{a}$)	$\mathbf{u}_G = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta} - \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^*, \boldsymbol{\theta} - \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} = \boldsymbol{\theta}^* - \langle \boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a}$
Sphère-cylindre	$\mathbf{u}_G - \langle \mathbf{u}_G, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} = \mathbf{0}$	non rencontré en pratique
Sphérique	$\mathbf{u}_G = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^*$

6.4.2 Efforts de liaison

En complément de l'aspect cinématique, que l'on vient de voir, une description des efforts de liaison entre les deux corps Ω et Ω^* doit être proposée. Dans ce qui suit, on considère que les liaisons sont « parfaites », c'est-à-dire telles que :

- la géométrie des surfaces de contact est parfaite (de formes canoniques, et indéformables) ;
- le contact se fait sans frottement, ce qui signifie que les efforts ne s'expriment que de façon normale à la surface (pression de contact).

L'enjeu est alors de déterminer, pour une liaison donnée, quelles composantes de résultante ou de moment sont nécessairement nulles en vertu de cette hypothèse de liaison parfaite. L'exemple qui suit montre la démarche dans le cas d'une liaison sphérique.

■ **Exemple 6.11 — Action transmissible par une liaison sphérique parfaite.** Afin d'autoriser une rotation d'axe arbitraire entre Ω et Ω^* , cette liaison est obtenue par l'association parfaite de deux surfaces sphériques de mêmes centre O et rayon R . On introduit alors la base sphérique naturellement associée $(\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi), \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi), \mathbf{e}_\phi(\vartheta, \phi))$, de coordonnées (r, ϑ, ϕ) .

Comme on suppose que le contact est sans frottement, le vecteur contrainte en chaque point de la surface de contact Σ_c est normal à cette dernière :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \forall t$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est la normale unitaire sortante à Ω en un point M de Σ_c (vu que l'on considère les actions de Ω^* sur Ω) ; par contre, on ne connaît pas la répartition locale de pression de contact $p(\mathbf{x}, t)$, et celle-ci est d'autant moins accessible que la section Σ de Ω concernée est indéformable, et que le champ de contraintes ne peut donc être déterminé.

Ainsi, si l'on décrit un point M de la surface de contact par ses coordonnées sphériques :

$$\mathbf{x} = R \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi), \quad \forall \vartheta \in [0, \pi[, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[$$

le vecteur contrainte s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = p(\vartheta, \phi, t) \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi)$$

si la normale sortante à Ω est $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = -\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi)$. Alors on peut calculer la résultante et le moment en O des actions de liaison de Ω^* sur Ω respectivement comme :

$$\mathbf{R}^l(t) = \int_{\Sigma_c} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS_x = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p(\vartheta, \phi, t) \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) R \sin \vartheta d\phi d\vartheta$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_O}^l(t) = \int_{\Sigma_c} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS_x = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) \wedge p(\vartheta, \phi, t) \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) R \sin \vartheta d\phi d\vartheta = \mathbf{0}$$

vu que $\mathbf{x}_O = \mathbf{0}$ dans la base sphérique considérée.

L'hypothèse de liaison parfaite nous permet donc de conclure que le moment (par rapport au centre de la liaison sphérique) des actions de liaison est nul, et ce, quelle que soit la répartition de la pression de contact entre Ω et Ω^* . En revanche, rien ne peut être affirmé pour la résultante associée. ■

Plutôt que d'étudier les liaisons une à une, il est possible de se donner un critère systématique permettant de déterminer quelles composantes de résultante ou de moment sont nécessairement nulles pour une liaison parfaite donnée. Pour cela, dans le cas d'une liaison avec un bâti Ω^* fixe et indéformable, on peut montrer qu'une telle liaison doit vérifier que :

$$\langle \mathbf{R}, \mathbf{u}_G \rangle = 0, \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\theta} \rangle = 0$$

pour tout mouvement arbitraire autorisé par la liaison. Ceci permet de déterminer quelles composantes de la résultante ou du moment des efforts de Ω^* sur Ω peuvent être supposées nulles. Un résultat analogue est obtenu dans le cas d'une liaison avec une autre poutre Ω^* .

R Une justification du résultat précédent peut se faire en introduisant le travail des efforts de liaison comme :

$$\mathcal{T}(\Omega^* \leftrightarrow \Omega) = \int_{\Sigma} \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \rangle dS$$

où l'on a supposé, de façon systématique, que l'action de liaison de Ω^* sur la poutre Ω s'exerce directement sur la section Σ de Ω concernée par la liaison avec Ω^* . Ainsi, suivant où se trouve la section en question, le vecteur normal $\mathbf{n}$ est égal à $\mathbf{e}$ ou à $-\mathbf{e}$.

On établit alors qu'une liaison parfaite n'est ni motrice ni résistante, et est donc caractérisée par un travail nul :

$$\mathcal{T}(\Omega^* \leftrightarrow \Omega) = 0$$

ce qui permet de considérer, un à un, les liaisons introduites plus haut. Dans le cas d'une liaison avec un bâti Ω^* fixe et indéformable ($\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$), on peut réécrire le travail des efforts de liaison comme :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\Omega^* \leftrightarrow \Omega) &= \int_{\Sigma} \langle \boldsymbol{\sigma}(\pm \mathbf{e}), \mathbf{u}_G + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_{\Sigma} \rangle dS \\ &= \int_{\Sigma} \langle \boldsymbol{\sigma}(\pm \mathbf{e}), \mathbf{u}_G \rangle dS + \int_{\Sigma} \langle \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge \boldsymbol{\sigma}(\pm \mathbf{e}), \boldsymbol{\theta} \rangle dS \\ &= \pm \langle \mathbf{R}, \mathbf{u}_G \rangle \pm \langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\theta} \rangle\end{aligned}$$

Ainsi, pour qu'une liaison soit parfaite, elle doit donc vérifier :

$$\langle \mathbf{R}, \mathbf{u}_G \rangle = 0, \text{ et } \langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\theta} \rangle = 0$$

quel que soit le mouvement autorisé par la liaison.

Dans le cas de la liaison sphérique considérée dans l'exemple 6.11, cette condition se réduit à $\langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\theta} \rangle = 0$ vu que le centre de la section concernée reste fixe ($\mathbf{u}_G = \mathbf{0}$); comme la rotation de section $\boldsymbol{\theta}$ est arbitraire, il faut nécessairement que le moment des action de liaison $\mathbf{M}$ s'annule pour pouvoir vérifier cette condition.

Résumé 6.13 — Action de liaison du corps Ω^* sur la poutre Ω au niveau de la section Σ , pour une liaison parfaite.

Liaisons (Ω/Ω^*)	Résultante et moment de l'action de liaison de Ω^* sur Ω
Articulation ou appui (2D)	$\mathbf{R}$ quelconque (dans le plan) et $\mathbf{M} = \mathbf{0}$
Appui glissant (2D)	$\langle \mathbf{R}, \mathbf{e} \rangle = 0$ et $\mathbf{M} = \mathbf{0}$
Encastrement	$\mathbf{R}$ et $\mathbf{M}$ quelconques
Pivot (d'axe $\mathbf{a}$)	$\mathbf{R}$ quelconque et $\langle \mathbf{M}, \mathbf{a} \rangle = 0$
Sphère-cylindre	$\langle \mathbf{R}, \mathbf{e} \rangle = 0$ et $\mathbf{M} = \mathbf{0}$
Sphérique	$\mathbf{R}$ quelconque et $\mathbf{M} = \mathbf{0}$



On n'a pas évoqué ici le cas de la liaison encastrement. Dans ce cas, aucun mouvement relatif n'est possible entre les deux solides, ce qui revient à dire que l'on ne dispose d'aucune information sur les composantes des résultante et moment des actions de liaison.

6.4.3 Résolution complète d'un problème de poutres

On a vu dans le paragraphe précédent que, pour chaque liaison parfaite considérée, un certain nombre de composantes des résultantes et moments des actions de liaison pouvaient être supposées nulles; les autres, en revanche, ne sont pas fixées *a priori*, et on parle alors d'inconnues de liaison pour ces composantes. Comme celles-ci interviennent dans les équations d'équilibre que l'on a précisées dans les paragraphes 6.2.2 et 6.2.3, elles doivent être déterminées si l'on souhaite pouvoir évaluer ces efforts intérieurs dans les différentes poutres.

Pour cela, il faut mettre en regard de ces inconnues de liaison le nombre d'équations indépendantes les reliant; dans le cas statique, il s'agit d'écrire l'équilibre global en résultante et en moment de la poutre complète (ou de chacune des poutres complètes s'il s'agit d'un assemblage), ce qui permet à chaque fois d'établir six relations scalaires (trois en résultante, trois en moment) entre les différentes inconnues de liaison.

Problèmes isostatiques

Si l'on a autant de relations scalaires que d'inconnues de liaison, on qualifie le problème d'« isostatique » : il est alors possible de déterminer les résultante et moment des efforts intérieurs au sein de chaque poutre de l'assemblage considéré.

■ **Exemple 6.12 — Détermination des efforts intérieurs dans un portique.** On reprend ici l'étude du portique de l'exemple 6.10 afin de calculer en tout point les résultante et moment des efforts intérieurs à l'aide des équations d'équilibre.

Pour cela, il est d'abord utile de faire le bilan des inconnues du problème, ainsi que des équations que l'on peut établir :

- chaque liaison encastrement équivaut à six inconnues scalaires de liaison (trois composantes pour la résultante, et trois composantes pour le moment), ce qui porte donc le total à 18 inconnues de liaison ;
- pour chaque poutre, il est possible d'écrire trois relations scalaires pour l'équilibre global en résultante de la poutre complète, et trois relations scalaires pour l'équilibre global en moment, ce qui permet d'obtenir finalement, pour le problème traité, 18 équations scalaires indépendantes.

Le problème est ainsi isostatique : il est possible de déterminer les résultante et moment des efforts intérieurs en tout point des trois poutres du portique.

Nous commençons par l'approche locale. En ce qui concerne la résultante, l'équilibre local (statique) permet d'écrire pour les trois poutres que :

$$\mathbf{R}^{(1)'} = \mathbf{0}, \mathbf{R}^{(2)'} = \mathbf{0}, \text{ et } \mathbf{R}^{(3)'} = \mathbf{0}$$

La résultante est donc constante sur chacune des poutres. Par ailleurs, on vérifie au niveau des liaisons encastrements :

$$\mathbf{R}^{(1)}(L) = \mathbf{R}^{(2)}(0), \text{ et } \mathbf{R}^{(2)}(L) = \mathbf{R}^{(3)}(0)$$

vu qu'aucune action extérieure n'est appliquée à ce niveau. On sait aussi que, par définition de la résultante :

$$\mathbf{R}^{(3)}(L) = -F\mathbf{i}_z$$

ce qui implique que :

$$\mathbf{R}^{(1)}(z) = -F\mathbf{i}_z, \forall z \in [0, L], \mathbf{R}^{(2)}(x) = -F\mathbf{i}_z, \forall x \in [0, L], \text{ et } \mathbf{R}^{(3)}(y) = -F\mathbf{i}_z, \forall y \in [0, L]$$

ce qui permet, d'ailleurs, de retrouver la résultante de l'action du bâti sur le portique comme : $\mathbf{R}_0 = -\mathbf{R}^{(1)}(0) = F\mathbf{i}_z$.

Dans un deuxième temps, l'équilibre local en moment au niveau de chaque poutre permet d'écrire que :

$$\mathbf{M}^{(1)'} + \mathbf{i}_z \wedge \mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{0}, \mathbf{M}^{(2)'} + \mathbf{i}_x \wedge \mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{0}, \text{ et } \mathbf{M}^{(3)'} + \mathbf{i}_y \wedge \mathbf{R}^{(3)} = \mathbf{0}$$

Ainsi, le moment le long de la poutre Ω_3 vérifie :

$$\mathbf{M}^{(3)}(y) = (\mathbf{i}_y \wedge F\mathbf{i}_z)y + C_3$$

où la constante C_3 est déterminée à l'aide des conditions de chargement au niveau de la section extrémité en $y = L$ (moment nul $\mathbf{M}^{(3)}(L) = \mathbf{0}$), soit, finalement :

$$\mathbf{M}^{(3)}(y) = -F(L-y)\mathbf{i}_x, \forall y \in [0, L]$$

Ensuite, le moment le long de la poutre Ω_2 est tel que :

$$\mathbf{M}^{(2)}(x) = (\mathbf{i}_x \wedge F\mathbf{i}_z)x + C_2$$

soit, avec la condition de raccord entre les deux poutres Ω_2 et Ω_3 ($\mathbf{M}^{(2)}(L) = \mathbf{M}^{(3)}(0)$) :

$$\mathbf{M}^{(2)}(x) = F(L-x)\mathbf{i}_y - FL\mathbf{i}_x, \forall x \in [0, L]$$

Enfin, le moment le long de la poutre Ω_1 vérifie :

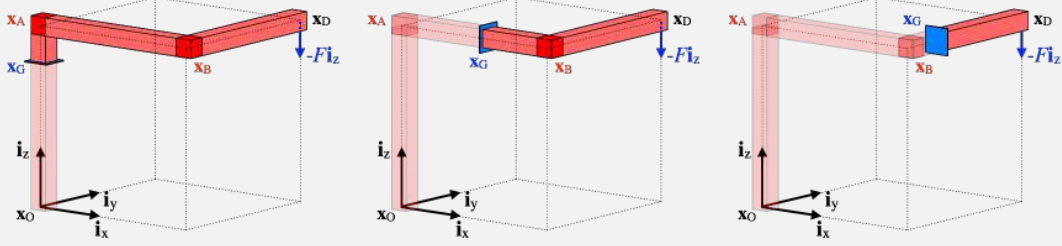
$$\mathbf{M}^{(1)}(z) = (\mathbf{i}_z \wedge F\mathbf{i}_z)z + C_1 = C_1$$

où C_1 est déterminée à l'aide de la condition de raccord entre Ω_1 et Ω_2 ($\mathbf{M}^{(1)}(L) = \mathbf{M}^{(2)}(0)$) :

$$\mathbf{M}^{(1)}(z) = FL\mathbf{i}_y - FL\mathbf{i}_x, \forall z \in [0, L]$$

ce qui permet, d'ailleurs, de retrouver le moment au point O de l'action du bâti sur le portique comme : $\mathbf{M}_O = -\mathbf{M}^{\textcircled{1}}(0) = FL\mathbf{i}_x - FL\mathbf{i}_y$.

De façon équivalente, on peut appliquer l'approche globale. Ainsi, on peut écrire, pour différentes localisations de coupure au sein des trois poutres du portique, les équilibres du tronçon aval.



Que l'on coupe au niveau d'une section de la poutre Ω_1 , Ω_2 ou Ω_3 , l'équilibre du tronçon aval permet alors d'établir directement que :

$$-\mathbf{R} - F\mathbf{i}_z = \mathbf{0}$$

et donc que :

$$\mathbf{R}^{\textcircled{1}}(z) = -F\mathbf{i}_z, \forall z \in [0, L], \mathbf{R}^{\textcircled{2}}(x) = -F\mathbf{i}_z, \forall x \in [0, L], \text{ et } \mathbf{R}^{\textcircled{3}}(y) = -F\mathbf{i}_z, \forall y \in [0, L]$$

On trouve donc, par ce raisonnement global, que la résultante est constante quelle que soit la poutre considérée. Cependant, s'il s'agit pour la poutre Ω_1 d'une sollicitation de compression (effort normal négatif), les résultantes dans les poutres Ω_2 et Ω_3 correspondent à des efforts tranchants.

En outre, on obtient pour l'expression du moment, en distinguant les coupures selon les poutres où elles se situent :

— pour la poutre Ω_1 :

$$-\mathbf{M}^{\textcircled{1}}(z) + ((L-z)\mathbf{i}_z + L\mathbf{i}_x + L\mathbf{i}_y) \wedge (-F\mathbf{i}_z) = \mathbf{0}$$

au centre de la section de coupure, ce qui donne finalement :

$$\mathbf{M}^{\textcircled{1}}(z) = FL\mathbf{i}_y - FL\mathbf{i}_x, \forall z \in [0, L]$$

ce qui montre que la poutre Ω_1 est sollicitée en flexion, dite déviée, car non parallèle à l'un des deux axes principaux d'inertie de la section ;

— pour la poutre Ω_2 , on établit que, au centre de la section de coupure, on a :

$$-\mathbf{M}^{\textcircled{2}}(x) + ((L-x)\mathbf{i}_x + L\mathbf{i}_y) \wedge (-F\mathbf{i}_z) = \mathbf{0}$$

soit, finalement :

$$\mathbf{M}^{\textcircled{2}}(x) = F(L-x)\mathbf{i}_y - FL\mathbf{i}_x, \forall x \in [0, L]$$

ce qui montre que la poutre Ω_2 est sollicitée en flexion-torsion ;

— enfin, pour la poutre Ω_3 , on a :

$$-\mathbf{M}^{\textcircled{3}}(y) + (L-y)\mathbf{i}_y \wedge (-F\mathbf{i}_z) = \mathbf{0}$$

soit, directement :

$$\mathbf{M}^{\textcircled{3}}(y) = -F(L-y)\mathbf{i}_x, \forall y \in [0, L]$$

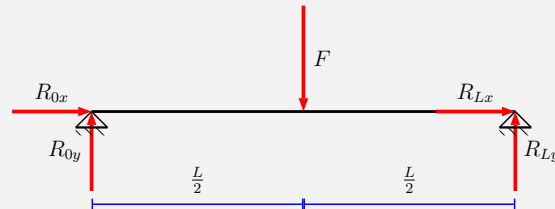
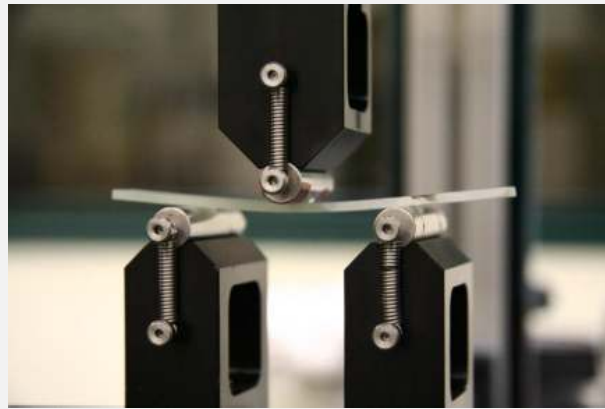
ce qui correspond à une sollicitation de flexion simple.

R Si l'on s'intéresse à la déformée du portique, la démarche consiste alors à utiliser les relations de comportement poutre, obtenues dans le paragraphe 6.3, et les conditions de raccord cinématiques, détaillées dans l'exemple 6.10. Dans le cas d'une poutre droite, les équations différentielles qui correspondent à chaque sollicitation (traction, flexion, torsion) sont alors découplées les unes des autres.

Problèmes hyperstatiques

S'il y a plus d'inconnues de liaison que de relations scalaires issues des équations d'équilibre des poutres complètes, le problème est dit « hyperstatique », de degré d'hyperstatisme la différence entre ces deux quantités. Dans ce cas, les résultante et moment des efforts intérieurs dans chaque poutre doivent s'exprimer en fonction d'inconnues de liaison dites hyperstatiques, que l'on ne peut pas déterminer avec les seules équations d'équilibre des poutres complètes, et dont le nombre est égal au degré d'hyperstatisme du problème.

■ **Exemple 6.13 — Détermination des efforts intérieurs dans un essai de flexion trois points.** On revient ici sur l'étude d'un essai de flexion trois points, tel qu'il a été présenté sur la figure 6.2 page 155 : la poutre, d'axe $\mathbf{i}_x$, est posée en $x = 0$ et en $x = L$ sur deux appuis qui, si l'on fait l'hypothèse d'un problème plan, peuvent être modélisés par des appuis bidimensionnels dans le plan vertical associé à $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y)$, comme représenté sur la figure ci-dessous.



On peut donc recenser quatre inconnues de liaison, à savoir les deux composantes selon $\mathbf{i}_x$ et $\mathbf{i}_y$ de la résultante $\mathbf{R}_0$ ou $\mathbf{R}_L$ des actions de liaison au niveau de chaque appui (vu que le moment associé est nul) : R_{0x} et R_{0y} en $x = 0$, et R_{Lx} et R_{Ly} en $x = L$. Pour les déterminer, il est possible d'écrire trois équations scalaires correspondant à l'équilibre statique de la poutre complète, sachant que l'action appliquée par le rouleau de la machine d'essai est caractérisée par une résultante $\mathbf{R}^{ext} = -F\mathbf{i}_y$, et un moment $\mathbf{M}^{ext}$ nul au centre de la section située à mi-longueur de la poutre :

— les deux projections dans le plan de l'équation d'équilibre global (statique) en résultante de la poutre complète :

$$R_{0x} + R_{Lx} = 0$$

$$R_{0y} + R_{Ly} - F = 0$$

— la projection selon la normale $\mathbf{i}_z$ au plan de l'équation d'équilibre global (statique) en moment de la poutre complète, exprimée en $x = 0$:

$$\left\langle \frac{L}{2} \mathbf{i}_x \wedge (-F \mathbf{i}_y) + L \mathbf{i}_x \wedge (R_{Lx} \mathbf{i}_x + R_{Ly} \mathbf{i}_y), \mathbf{i}_z \right\rangle = -F \frac{L}{2} + R_{Ly} L = 0$$

On détermine alors facilement que :

$$R_{0y} = R_{Ly} = \frac{F}{2}$$

tandis que les composantes horizontales R_{0x} et R_{Lx} restent indéterminées. Le problème traité est donc hyperstatique d'ordre un : les résultante et moment des efforts intérieurs le long de la poutre ne peuvent être déterminés qu'en fonction d'une inconnue de liaison hyperstatique, à choisir entre R_{0x} et R_{Lx} .

Ainsi, si l'on applique par exemple l'approche globale pour déterminer résultante et moment, il faut tout d'abord distinguer deux cas :

1. si l'on coupe la poutre au niveau d'une section d'abscisse $x < L/2$, on obtient alors, en isolant par exemple le tronçon amont :

$$\mathbf{R}(x) + \mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$$

ainsi que, au centre de la section d'abscisse x :

$$\mathbf{M}(x) - x\mathbf{i}_x \wedge \mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$$

soit, finalement, des composantes scalaires de la résultante $\mathbf{R}$ et du moment $\mathbf{M}$ telles que :

$$\begin{cases} R_x(x) = -R_{0x}, \forall x \in \left[0, \frac{L}{2}\right[\\ R_y(x) = -\frac{F}{2}, \forall x \in \left[0, \frac{L}{2}\right[\\ M_z(x) = \frac{F}{2}x, \forall x \in \left[0, \frac{L}{2}\right[\end{cases}$$

2. si l'on coupe la poutre au niveau d'une section d'abscisse $x > L/2$, on aboutit, en isolant par exemple le tronçon aval, à :

$$-\mathbf{R}(x) + \mathbf{R}_L = \mathbf{0}$$

ainsi que, au centre de la section d'abscisse x :

$$-\mathbf{M}(x) + (L-x)\mathbf{i}_x \wedge \mathbf{R}_L = \mathbf{0}$$

soit, finalement, des composantes scalaires de la résultante $\mathbf{R}$ et du moment $\mathbf{M}$ telles que :

$$\begin{cases} R_x(x) = R_{Lx} = -R_{0x}, \forall x \in \left]\frac{L}{2}, L\right] \\ R_y(x) = \frac{F}{2}, \forall x \in \left]\frac{L}{2}, L\right] \\ M_z(x) = \frac{F}{2}(L-x), \forall x \in \left]\frac{L}{2}, L\right] \end{cases}$$

si l'on choisit R_{0x} comme inconnue hyperstatique.

Bien sûr, on aurait également pu utiliser les équations d'équilibre local en résultante et en moment, en prenant bien garde de considérer que la poutre doit en fait être vue comme deux demi-poutres encastrees au niveau de la section en contact avec le rouleau de la machine d'essai. Ainsi, l'équilibre local en résultante permet de déterminer que :

$$\mathbf{R}'(x) = \mathbf{0}, \forall x \in \left]0, \frac{L}{2}\right[\cup \left]\frac{L}{2}, L\right[$$

et donc que la résultante est constante sur chaque demi-poutre, d'où :

$$\mathbf{R}(x) = \begin{cases} -\mathbf{R}_0 = -R_{0x}\mathbf{i}_x - \frac{F}{2}\mathbf{i}_y, & \forall x \in \left]0, \frac{L}{2}\right[\\ +\mathbf{R}_L = R_{Lx}\mathbf{i}_x + \frac{F}{2}\mathbf{i}_y, & \forall x \in \left]\frac{L}{2}, L\right[\end{cases}$$

En outre, l'équilibre local en moment doit aussi s'exprimer au niveau de chaque demi-poutre :

$$\begin{cases} \mathbf{M}'(x) + \mathbf{i}_x \wedge (-R_{0x}\mathbf{i}_x - \frac{F}{2}\mathbf{i}_y) = \mathbf{0}, & \forall x \in \left]0, \frac{L}{2}\right[\\ \mathbf{M}'(x) + \mathbf{i}_x \wedge (R_{Lx}\mathbf{i}_x + \frac{F}{2}\mathbf{i}_y) = \mathbf{0} & \forall x \in \left]\frac{L}{2}, L\right[\end{cases}$$

pour retrouver :

$$\mathbf{M}(x) = \begin{cases} \frac{F}{2} x \mathbf{i}_z, & \forall x \in \left] 0, \frac{L}{2} \right[\\ -\frac{F}{2} x \mathbf{i}_z + \frac{F}{2} L \mathbf{i}_z, & \forall x \in \left] \frac{L}{2}, L \right[\end{cases}$$

à l'aide des conditions de moment nul en $x = 0$ et $x = L$. Ainsi, si l'effort tranchant et le moment fléchissant sont complètement déterminés, l'effort normal doit être exprimé à l'aide d'une inconnue hyperstatique.

Quelle que soit l'approche employée, on constate notamment que la résultante des efforts intérieurs est discontinue en $x = L/2$; ceci s'explique par l'effort F appliqué à ce niveau : en effet, si l'on écrit l'équilibre en résultante de la section infinitésimale d'abscisse $L/2$, en distinguant les résultantes des actions des tronçons aval et amont, on trouve que :

$$\mathbf{R}\left(\frac{L}{2}^+\right) - \mathbf{R}\left(\frac{L}{2}^-\right) + \mathbf{R}^{ext} = \mathbf{0}$$

vu que $\mathbf{R}^{ext} = -F \mathbf{i}_y$ est définie comme la résultante de l'action mécanique du rouleau sur la poutre en $x = L/2$; en outre, on a bien pris soin de distinguer :

- la résultante $\mathbf{R}\left(\frac{L}{2}^+\right)$ de l'action de la partie aval sur la section d'abscisse $L/2$;
- la résultante $-\mathbf{R}\left(\frac{L}{2}^-\right)$ de l'action de la partie amont sur la section d'abscisse $L/2$;

ce qui revient à considérer que la poutre est en fait composée de deux demi-poutres encastées au niveau du point d'application de la résultante de l'action du rouleau. Pour ce qui concerne le moment, l'équilibre en moment de la section infinitésimale d'abscisse $L/2$, exprimé en son centre, permet d'établir, avec les mêmes conventions d'écriture, que :

$$\mathbf{M}\left(\frac{L}{2}^+\right) - \mathbf{M}\left(\frac{L}{2}^-\right) = \mathbf{0}$$

vu que le moment de l'action du rouleau sur la poutre est nul en ce point. Ceci permet donc de confirmer que le moment des efforts intérieurs est continu en $x = L/2$, et vaut :

$$M_z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL}{4}$$

■

Si l'on souhaite déterminer les inconnues hyperstatiques du problème, il est, dans ce cas, nécessaire de calculer la déformée des poutres de l'assemblage, en introduisant les relations de comportement poutre, obtenues dans le paragraphe 6.3 ; les équations différentielles obtenues sont alors résolues à l'aide des conditions imposées sur la cinématique, ce qui permet au passage de déterminer les inconnues de liaison hyperstatiques.

■ **Exemple 6.14 — Essai de flexion trois points : résolution complète.** On poursuit ici la résolution du problème de l'essai de flexion trois points, débutée dans l'exemple 6.13, et pour lequel il restait une inconnue de liaison hyperstatique. Comme cette dernière concernait la composante axiale de la résultante, nous allons utiliser la relation de comportement entre l'effort axial et le déplacement longitudinal, puis les conditions cinématiques associées afin de déterminer entièrement la solution en traction-compression. Ainsi, comme on a :

$$R_x(x) = EA u'_{Gx}(x), \quad \forall x \in [0, L]$$

le déplacement longitudinal des centres de sections vérifie donc, sur chaque demi-poutre :

$$EA u'_{Gx}(x) = \begin{cases} -R_{0x}, & \forall x \in \left] 0, \frac{L}{2} \right[\\ +R_{Lx} = -R_{0x}, & \forall x \in \left] \frac{L}{2}, L \right[\end{cases}$$

Sachant que, au niveau des appuis, le déplacement longitudinal est nul ($u_{Gx}(0) = 0 = u_{Gx}(L)$), on aboutit à :

$$EA u_{Gx}(x) = \begin{cases} -R_{0x}x, & \forall x \in \left] 0, \frac{L}{2} \right[\\ -R_{0x}(x-L), & \forall x \in \left] \frac{L}{2}, L \right[\end{cases}$$

et, comme il s'agit d'une seule et même poutre, le déplacement longitudinal doit être continu en $x = L/2$, soit :

$$-R_{0x} \frac{L}{2} = R_{0x} \frac{L}{2}$$

ce qui implique directement que l'inconnue hyperstatique est en fait nulle :

$$R_{0x} = 0$$

Par conséquent, l'effort normal est nul dans toute la poutre, de même que le déplacement longitudinal des centres de sections. L'utilisation de la relation de comportement nous a ainsi permis d'utiliser des conditions aux limites supplémentaires (à savoir, celles issues de la cinématique) afin de déterminer à la fois l'inconnue hyperstatique, et la cinématique associée.

Par ailleurs, maintenant que l'on connaît les résultante et moment des efforts intérieurs le long de la poutre, on peut déterminer la contrainte normale comme :

$$\sigma_{xx}(x, y) = -y \frac{M_z(x)}{I_z}$$

qui est alors maximale pour $x = L/2$ et $y = -h/2$ (où h est la hauteur de la poutre) :

$$\sigma_{xxmax} = \frac{FLh}{8I_z}$$

Si, en outre, on s'intéresse à la déformée de flexion de la poutre, et que l'on adopte l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, il suffit d'utiliser la relation de comportement entre le moment fléchissant et le déplacement transverse :

$$\mathbf{M}_\Sigma(x) = E\mathbb{J}(\mathbf{i}_x \wedge \mathbf{u}_{G\Sigma}''(x)), \quad \forall x \in [0, L]$$

ce qui donne, selon la normale au plan du problème :

$$M_z(x) = EI_z u_{Gy}''(x), \quad \forall x \in [0, L]$$

Le déplacement transverse de la ligne moyenne vérifie donc, sur chaque demi-poutre :

$$EI_z u_{Gy}''(x) = \begin{cases} \frac{F}{2}x, & \forall x \in]0, \frac{L}{2}[\\ \frac{F}{2}(L-x), & \forall x \in]\frac{L}{2}, L[\end{cases}$$

et, sachant que, au niveau des appuis, le déplacement transverse est nul ($u_{Gy}(0) = 0 = u_{Gy}(L)$), on aboutit à :

$$EI_z u_{Gy}(x) = \begin{cases} \frac{F}{12}x^3 + C_1x, & \forall x \in]0, \frac{L}{2}[\\ \frac{F}{12}(3Lx^2 - x^3 - 2L^3) + C_2(x-L), & \forall x \in]\frac{L}{2}, L[\end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes à déterminer. Comme il s'agit d'une seule et même poutre, le déplacement transverse et la rotation de section (et donc, la dérivée du déplacement transverse compte tenu de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli) doivent être continus en $x = L/2$, soit :

$$\frac{FL^3}{96} + C_1 \frac{L}{2} = -\frac{11FL^3}{96} - C_2 \frac{L}{2}, \text{ et } \frac{FL^2}{16} + C_1 = \frac{3FL^2}{16} + C_2$$

ce qui permet de déterminer les deux constantes comme suit :

$$C_1 = -\frac{FL^2}{16}, \text{ et } C_2 = -\frac{3FL^2}{16}$$

La déformée évolue donc comme :

$$u_{Gy}(x) = \begin{cases} \frac{Fx}{2EI_z} \left(\frac{x^2}{6} - \frac{L^2}{8} \right), & \forall x \in]0, \frac{L}{2}[\\ -\frac{F}{2EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{L}{2}x^2 + \frac{3L^2}{8}x - \frac{L^3}{24} \right), & \forall x \in]\frac{L}{2}, L[\end{cases}$$

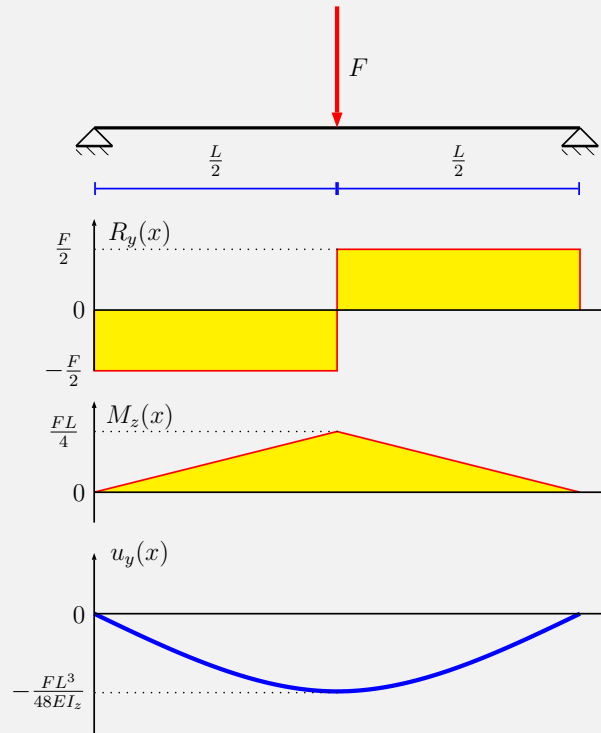
et est maximale (en valeur absolue) en $x = L/2$, valant :

$$|u_{Gy}|_{max} = \frac{FL^3}{48EI_z}$$

ce qui permet, par exemple, de déterminer le module de Young du matériau constitutif de la poutre si l'on mesure simultanément l'effort exercé et la déformée au centre de la poutre.

Les graphes ci-dessous récapitulent l'évolution des résultante et moment des efforts intérieurs, ainsi que la déformée de la poutre, et permettent de vérifier notamment que l'effort tranchant et le moment fléchissant sont reliés par l'équation d'équilibre local en moment, qui ici s'écrit comme :

$$R_y(x) = -M'_z(x), \quad \forall x \in]0, \frac{L}{2}[\cup]\frac{L}{2}, L[$$



6.5 Flambement des poutres droites

Nous allons étudier ici le phénomène de flambement (ou encore de flambage) qui correspond à l'apparition brutale d'une solution de flexion dans une poutre soumise à des actions mécaniques compatibles avec une solution de compression « classique ». La figure 6.21 illustre ce phénomène dans le cas d'un rail de chemin de fer : quand la température augmente, si la libre dilatation du rail n'est pas permise, il est possible que l'effort normal résultant atteigne un niveau suffisant pour qu'il y ait flambement.

Il s'agit d'un phénomène instable, qui apparaît dès que la charge de compression atteint une valeur particulière, appelée charge critique : à ce moment, le problème perd sa propriété d'unicité



FIGURE 6.21 – Flambement de rail.

en solution, à cause de non linéarités d'origine géométrique. Pour décrire ces dernières, il est donc nécessaire de reprendre l'équation d'équilibre local en moment que nous avons déterminée dans le paragraphe 6.2.3.

6.5.1 Équation d'équilibre local en moment dans la configuration déformée

On reprend pour cela le cas de l'isolement d'un tronçon ω de longueur infinitésimale, compris entre les abscisses s^- et $s^+ = s^- + ds$ distinctes des extrémités de la poutre. On avait alors déterminé dans le paragraphe 6.2.3 l'équilibre en moment de ce tronçon, exprimé au centre G^- de la section d'abscisse s^- , comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & \int_{\omega} (\mathbf{x}_G(s) - \mathbf{x}_{G^-}(s^-) + \mathbf{x}_{\Sigma}) \wedge \mathbf{f}_V dV + \int_{\partial\omega \cap \partial\Omega} (\mathbf{x}_G(s) - \mathbf{x}_{G^-}(s^-) + \mathbf{x}_{\Sigma}) \wedge \mathbf{f}_S dS \\ & - \mathbf{M}(s^-) + (\mathbf{x}_G(s) - \mathbf{x}_{G^-}(s^-)) \wedge \mathbf{R}(s^+) + \mathbf{M}(s^+) \end{aligned}$$

Au lieu d'écrire que $\mathbf{x}_G(s) - \mathbf{x}_{G^-}(s^-) = (s - s^-)\mathbf{e}$ en vertu de l'hypothèse des petites perturbations, on conserve alors l'expression inchangée, de façon à aboutir, en passant à la limite $ds \rightarrow 0$:

$$\mathbf{c}_L(s) + \mathbf{M}'(s) + \mathbf{x}'_G(s) \wedge \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

On suppose alors qu'il est suffisant d'exprimer le placement de la ligne moyenne sous la forme $\mathbf{x}_G = s\mathbf{e} + \mathbf{u}_{G\Sigma}$ pour obtenir finalement que :

$$\mathbf{c}_L(s) + \mathbf{M}'(s) + (\mathbf{e} + \mathbf{u}'_{G\Sigma}(s)) \wedge \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

Ainsi, même si les deux configurations (initiale et déformée) restent proches l'une de l'autre, on ne néglige plus les rotations de section associées à la flexion, vu que l'on fait intervenir la dérivée $\mathbf{u}'_{G\Sigma}$ du déplacement transverse, qui, conformément à l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, est associée à $\boldsymbol{\theta}_{\Sigma}$.

Enfin, afin d'obtenir une équation formellement proche de celle que l'on obtient en flexion, on dérive l'équation établie plus haut, puis on injecte l'équation d'équilibre local en résultante de façon à obtenir finalement :

$$\mathbf{c}'_L(s) + \mathbf{M}''(s) + \mathbf{u}''_{G\Sigma}(s) \wedge \mathbf{R}(s) - (\mathbf{e} + \mathbf{u}'_{G\Sigma}(s)) \wedge \mathbf{f}_L(s) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

Cette équation est la seule qui doit être modifiée, toutes les autres relations restant dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. On voit alors qu'un effort normal (de compression) peut désormais intervenir dans cette équation d'équilibre en moment au travers des deux termes que l'on a ajoutés, alors que les comportements de traction-compression et de flexion étaient découplés jusqu'à présent dans le cas d'une poutre droite.

R Même si le flambage est un phénomène non linéaire, on obtient avec les hypothèses précédentes une équation linéaire qui correspond à un modèle dit du « flambage linéarisé ». Comme on le verra dans le paragraphe suivant, cette théorie permettra de décrire de façon partielle le flambage, en précisant sous quelle forme le phénomène commence à s'établir.

6.5.2 Flambage linéarisé

À des fins d'illustration, on se place maintenant dans un cadre un peu plus précis :

- la poutre n'est soumise à aucune densité linéique d'effort ou de moment ;
- la poutre n'est sollicitée qu'en compression : par conséquent, toutes les conditions aux limites selon une direction perpendiculaire à l'axe $\mathbf{e}$ de la poutre sont nulles, et l'effort normal est constant, s'écrivant comme $R_e = -P$, $P > 0$;
- on adopte l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, ce qui permet notamment de relier directement le moment de flexion au déplacement transverse.

Dans ce cas, l'équilibre en moment que l'on a établi dans le paragraphe précédent se réécrit comme :

$$\mathbf{M}_{\Sigma}''(s) + \mathbf{u}_{G\Sigma}''(s) \wedge (-P\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

où $\mathbf{M}_{\Sigma} = E\mathbb{J}(\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}_{G\Sigma}'')$, ce qui permet d'obtenir finalement :

$$E\mathbb{J}(\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}_{G\Sigma}''''(s)) - \mathbf{u}_{G\Sigma}''(s) \wedge P\mathbf{e} = \mathbf{0}, \forall s \in]0, L[$$

ce qui implique, par projection sur les axes principaux d'inertie $\mathbf{e}_{\chi_1}$ et $\mathbf{e}_{\chi_2}$ que :

$$\begin{aligned} EI_{\chi_2} u_{G\chi_1}''''(s) + Pu_{G\chi_1}'' &= 0, \forall s \in]0, L[\\ EI_{\chi_1} u_{G\chi_2}''''(s) + Pu_{G\chi_2}'' &= 0, \forall s \in]0, L[\end{aligned}$$

Comme ces deux équations scalaires sont semblables, on se limite dans ce qui suit à la première des deux.

On peut alors écrire la solution générale de cette équation comme :

$$u_{G\chi_1}(s) = A \cos(ks) + B \sin(ks) + Cs + D, \forall s \in [0, L], \text{ avec } k = \sqrt{\frac{P}{EI_{\chi_2}}}$$

où A , B , C et D sont quatre constantes à déterminer à l'aide de quatre conditions aux limites, comme dans le cas d'un problème de flexion « classique ». Comme on a supposé que la poutre n'était sollicitée qu'en compression, toutes les conditions aux limites que l'on peut écrire sont homogènes, et il s'agit alors de résoudre un problème de la forme :

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & \mathbb{L} & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où les composantes de la matrice $\mathbb{L}$ sont des fonctions de k et de L . Comme on recherche ici une solution non triviale ($\mathbf{u}_{G\Sigma} \neq \mathbf{0}$), il est nécessaire que la matrice $\mathbb{L}$ ne soit pas inversible, soit :

$$\det \mathbb{L} = 0$$

ce qui permet d'obtenir une équation scalaire donnant une condition que k doit vérifier pour que la solution de flexion puisse s'établir. On trouve alors une famille de valeurs k_i , $i \in \mathbb{N}^*$ possibles correspondant à des charges P_i données.

La plus petite de ces charges est appelée « charge critique de flambage », ou encore « charge critique d'Euler », et correspond à l'apparition du phénomène. On détermine alors le déplacement associé à cette charge, mais l'expression de celui-ci reste à une constante multiplicative près compte tenu de la singularité de la matrice $\mathbb{L}$: on parle de « mode de flambage ».



Le problème que l'on résout ici est en fait un problème aux valeurs propres généralisé, dont les valeurs propres sont les différentes charges de flambage, et les modes propres les différents modes de flambage, dont les amplitudes ne sont donc pas connues. Ceci s'explique par le modèle utilisé qui est une approche linéarisée qui ne peut rendre compte totalement du phénomène, qui est par nature non linéaire.

Les modes de flambage donnent donc la déformée de la poutre en début de flambement, mais ne peuvent pas décrire sa géométrie dans la configuration actuelle : pour cela, il faut un modèle qui sorte totalement du cadre de l'hypothèse des petites perturbations. En revanche, le modèle est suffisant pour déterminer de manière satisfaisante la charge critique, ce qui explique qu'il soit très utilisé pour dimensionner des poutres en compression.

■ **Exemple 6.15 — Flambement d'une poutre bi-appuyée.** On considère une poutre droite d'axe $\mathbf{i}_x$ et de longueur L , posée sur deux appuis à ses deux extrémités, et sollicitée en compression en $x = L$ (résultante $-\mathbf{P}\mathbf{i}_x$ et moment nul). Le problème de flambage s'écrit alors comme :

$$EI_z u_{Gy}''''(x) + Pu_{Gy}''(x) = 0, \forall x \in]0, L[$$

qui a pour solution :

$$u_{Gy}(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + Cx + D, \forall x \in [0, L], \text{ avec } k = \sqrt{\frac{P}{EI_z}}$$

Les quatre constantes vérifient alors les conditions aux limites suivantes :

— le déplacement transverse est nul au niveau des deux appuis :

$$u_{Gy}(0) = 0, \text{ et } u_{Gy}(L) = 0$$

— le moment est nul au niveau des deux appuis :

$$EI_z u_{Gy}''(0) = 0, \text{ et } EI_z u_{Gy}''(L) = 0$$

ce qui se réécrit sous forme matricielle comme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos kL & \sin kL & L & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos kL & \sin kL & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Afin d'obtenir une solution non nulle, il est nécessaire que la matrice précédente ne soit pas inversible, et donc que son déterminant soit nul, ce qui implique que :

$$0 = \det \mathbb{L} = \sin kL$$

ce qui est possible pour $k_i = i\pi/L$, $i \in \mathbb{N}^*$ ($i \neq 0$ pour éviter encore une fois la solution triviale), soit :

$$P_i = \frac{i\pi^2 EI_z}{L^2}, i \in \mathbb{N}^*$$

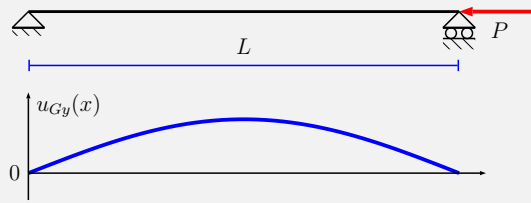
La charge critique correspond alors à la première de ces valeurs, c'est-à-dire :

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

le déplacement associé étant :

$$u_{Gy}(x) = B_c \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \forall x \in [0, L]$$

où la constante B_c reste indéterminée. Ainsi, le flambage se produit d'autant plus facilement que la poutre est longue, et de faible inertie de section.



Les autres modes de flambage, associées aux charges P_i , sont alors :

$$u_{Gy}(x) = B_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right), \forall x \in [0, L]$$

où chaque constante B_i reste, là encore, indéterminée. ■

L'expression de la charge critique de flambage est fortement influencée par les conditions aux limites aux extrémités de la poutre, comme on peut le constater sur la figure 6.22. En effet, la condition associée à $\det \mathbb{L} = 0$ est modifiée à chaque fois, et conduit logiquement à des expressions différentes du paramètre k , qui sont récapitulées dans la figure 6.23, ainsi que de la charge critique : on constate néanmoins que toutes les expressions sont de forme analogue :

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_z}{L_{eq}^2}$$

où L_{eq} est une longueur équivalente, du point de vue du flambage, qui dépend des conditions aux extrémités de la poutre :

- pour une poutre bi-encastée (du point de vue de la flexion), la longueur équivalente est la double de la longueur de la poutre ;
- pour une poutre encastée – libre, la longueur équivalente est la moitié de la longueur de la poutre ;
- pour une poutre encastée – appuyée, la longueur équivalente est d'environ 70% de la longueur de la poutre (la valeur exacte est associée à la résolution de l'équation $\tan kL = kL$).

On constate ainsi que, moins la poutre a des degrés de liberté au niveau de ses extrémités (rotation, voire déplacement transverse), plus la charge requise pour le flambement doit être élevée. On a donc tout intérêt à privilégier ce type de configurations pour éviter le phénomène. De façon similaire, on peut aussi privilégier l'ajout d'appuis intermédiaires de façon à « réduire » la longueur de la poutre.

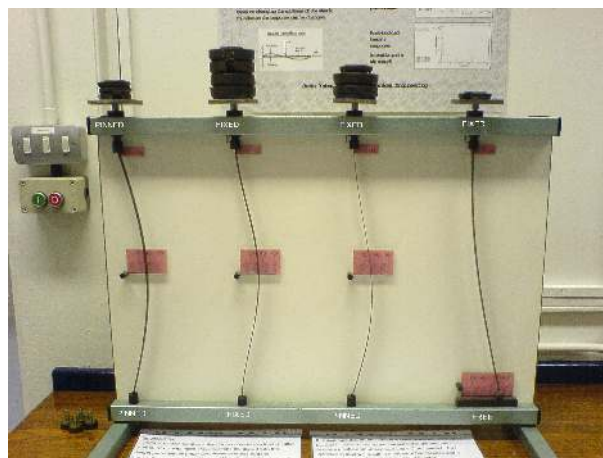


FIGURE 6.22 – Illustration de l'influence des conditions aux limites sur la valeur de la charge critique de flambage.

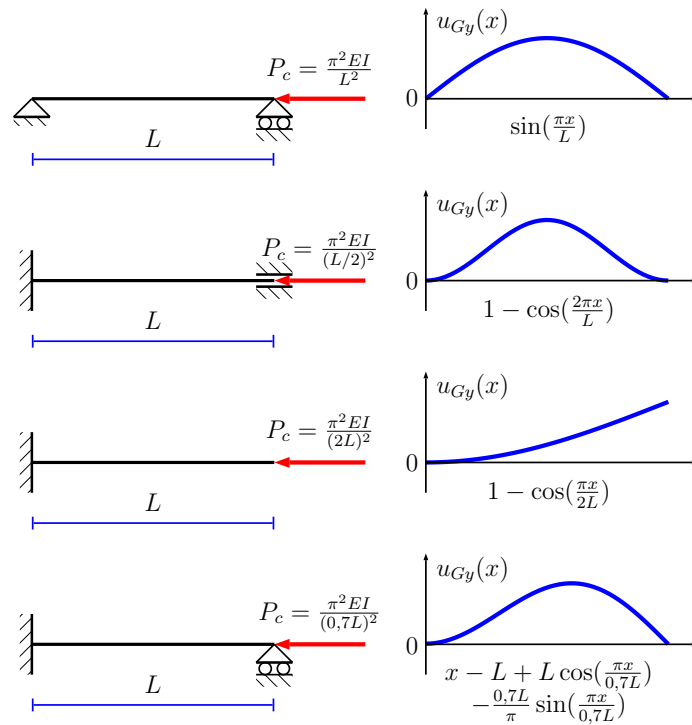


FIGURE 6.23 – Charges critiques et modes de flambage pour différentes conditions aux limites.

R Dans le cas de poutres où la rigidité en cisaillement est très inférieure à la rigidité de flexion, comme dans le cas de poutres sandwichs (où une couche de matériau très souple – de type mousse, ou en « nid d'abeilles » – est encadrée par deux couches de matériau très rigide – de type métallique) par exemple, les formules précédentes ne sont plus valables car il est nécessaire de prendre en compte l'influence du cisaillement. Dans ce cas, la charge critique vérifie :

$$P_c = \frac{\pi^2 \langle EI_z \rangle}{L_{eq}^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \langle EI_z \rangle}{L_{eq}^2 \langle \mu A \rangle}} \approx \langle \mu A \rangle$$

quand $L_{eq}^2 \langle \mu A \rangle \ll \langle EI_z \rangle$, où $\langle \bullet \rangle$ désigne la moyenne de $\bullet$ sur une section.

6.6 Résumé des formules importantes

Cinématique d'une poutre de Timoshenko – Résumé 6.1 page 160

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}_\Sigma$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (u'_{Ge} + \langle \boldsymbol{\theta}'_\Sigma \wedge \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \rangle) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_\Sigma \wedge \mathbf{e}) \otimes_S \mathbf{e} + (\boldsymbol{\theta}'_e \wedge \mathbf{x}_\Sigma) \otimes_S \mathbf{e}$$

Cinématique d'une poutre d'Euler-Bernoulli – Résumé 6.2 page 164

$$\boldsymbol{\theta}_\Sigma = \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + (\boldsymbol{\theta}_e \mathbf{e} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{u}'_{G\Sigma}) \wedge \mathbf{x}_\Sigma$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (u'_{Ge} - \langle \mathbf{u}''_{G\Sigma}, \mathbf{x}_\Sigma \rangle) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + (\boldsymbol{\theta}'_e \wedge \mathbf{x}_\Sigma) \otimes_S \mathbf{e}$$

Équilibre (statique) en résultante (approche globale) – Résumé 6.3 page 169

$$\int_0^s \mathbf{f}_L d\xi + \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}$$

$$\int_s^L \mathbf{f}_L d\xi + \mathbf{R}_L - \mathbf{R}(s) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{f}_L = \int_{\Sigma} \mathbf{f}_V dS + \int_{\partial\Sigma} \mathbf{f}_S dl$$

Équilibre (statique) en résultante (approche locale) – Résumé 6.4 page 172

$$\mathbf{f}_L + \mathbf{R}' = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}(0) = \int_{\Sigma(0)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} dS = -\mathbf{R}_0, \text{ et } \mathbf{R}(L) = \int_{\Sigma(L)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} dS = \mathbf{R}_L$$

Équilibre (statique) en moment (approche globale) – Résumé 6.5 page 176

$$\int_0^s (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L d\xi + \int_0^s \mathbf{c}_L d\xi + \mathbf{M}_0 - s \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_0 + \mathbf{M}(s) = \mathbf{0}$$

$$\int_s^L (\xi - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_L d\xi + \int_s^L \mathbf{c}_L d\xi + \mathbf{M}_L + (L - s) \mathbf{e} \wedge \mathbf{R}_L - \mathbf{M}(s) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_L = \int_{\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge \mathbf{f}_V dS + \int_{\partial\Sigma} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge \mathbf{f}_S dl$$

Équilibre (statique) en moment (approche locale) – Résumé 6.6 page 178

$$\mathbf{c}_L + \mathbf{M}' + \mathbf{e} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}(0) = \int_{\Sigma(0)} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} dS = -\mathbf{M}_0, \text{ et } \mathbf{M}(L) = \int_{\Sigma(L)} \mathbf{x}_{\Sigma} \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} dS = \mathbf{M}_L$$

$$\mathbf{R}_{\Sigma} = \mathbf{e} \wedge (\mathbf{c}_L + \mathbf{M}')$$

Relation de comportement pour la résultante dans le cas d'une poutre de Timoshenko – Résumé 6.7 page 183

$$\mathbf{R} = R_e \mathbf{e} + \mathbf{R}_{\Sigma} = EA u'_{Ge} \mathbf{e} + \mu A (\mathbf{u}'_{G\Sigma} - \boldsymbol{\theta}_{\Sigma} \wedge \mathbf{e})$$

Relation de comportement pour la résultante dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli – Résumé 6.8 page 183

$$\mathbf{R} = R_e \mathbf{e} + \mathbf{R}_{\Sigma} = EA u'_{Ge} \mathbf{e} - E (I_{\chi_2} \mathbf{e}_{\chi_1} \otimes \mathbf{e}_{\chi_1} + I_{\chi_1} \mathbf{e}_{\chi_2} \otimes \mathbf{e}_{\chi_2}) \mathbf{u}'''_{G\Sigma} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{c}_L$$

$$R_{\chi_1} = -EI_{\chi_2} u'''_{G\chi_1} - c_{L\chi_2}$$

$$R_{\chi_2} = -EI_{\chi_1} u'''_{G\chi_2} + c_{L\chi_1}$$

Tenseur d'inertie (base principale)

$$\mathbb{J} = \int_{\Sigma} (\|\mathbf{x}_{\Sigma}\|^2 \mathbb{I} - \mathbf{x}_{\Sigma} \otimes \mathbf{x}_{\Sigma}) dS$$

$$\mathbb{J} = I_e \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + I_{\chi_1} \mathbf{e}_{\chi_1} \otimes \mathbf{e}_{\chi_1} + I_{\chi_2} \mathbf{e}_{\chi_2} \otimes \mathbf{e}_{\chi_2}$$

$$I_{\chi_1} = \int_{\Sigma} \chi_2^2 dS$$

$$I_{\chi_2} = \int_{\Sigma} \chi_1^2 dS$$

$$I_e = I_{\chi_1} + I_{\chi_2} = \int_{\Sigma} (\chi_1^2 + \chi_2^2) dS$$

Relation de comportement pour le moment dans le cas d'une poutre de Timoshenko – Résumé 6.9 page 184

$$\mathbf{M} = M_e \mathbf{e} + \mathbf{M}_\Sigma = \mu I_e \theta'_e \mathbf{e} + E \mathbb{J} \boldsymbol{\theta}'_\Sigma$$

$$M_e = \mu I_e \theta'_e$$

$$M_{\chi_1} = EI_{\chi_1} \theta'_{\chi_1}$$

$$M_{\chi_2} = EI_{\chi_2} \theta'_{\chi_2}$$

Relation de comportement pour le moment dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli – Résumé 6.10 page 184

$$\mathbf{M} = M_e \mathbf{e} + \mathbf{M}_\Sigma = \mu I_e \theta'_e \mathbf{e} + E \mathbb{J} (\mathbf{e} \wedge \mathbf{u}''_{G\Sigma})$$

$$M_e = \mu I_e \theta'_e$$

$$M_{\chi_1} = -EI_{\chi_1} u''_{G\chi_2}$$

$$M_{\chi_2} = EI_{\chi_2} u''_{G\chi_1}$$

Vecteur contrainte dans une section – Résumé 6.11 page 193

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} = \sigma_{ee} \mathbf{e} + \boldsymbol{\tau}_\Sigma = \left(\frac{R_e}{A} + \langle \mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{e} \wedge \mathbb{J}^{-1} \mathbf{M}_\Sigma \rangle \right) \mathbf{e} + \frac{1}{A} \mathbf{R}_\Sigma + \frac{M_e}{I_e} \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_\Sigma$$

Paramètres cinématiques de la section d'une poutre Ω en liaison avec un corps Ω^* – Résumé 6.12 page 198

Liaisons (Ω/Ω^*)	Cas d'un bâti Ω^* fixe	Cas d'une poutre Ω^*
Articulation ou appui (2D)	$\mathbf{u}_G = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^*$ (dans le plan)
Appui glissant (2D)	$\mathbf{u}_G - \langle \mathbf{u}_G, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} = \mathbf{0}$	non rencontré en pratique
Encastrement	$\mathbf{u}_G = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^*, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*$
Pivot (d'axe $\mathbf{a}$)	$\mathbf{u}_G = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta} - \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^*, \boldsymbol{\theta} - \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{a} \rangle = \boldsymbol{\theta}^* - \langle \boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{a} \rangle$
Sphère-cylindre	$\mathbf{u}_G - \langle \mathbf{u}_G, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} = \mathbf{0}$	non rencontré en pratique
Sphérique	$\mathbf{u}_G = \mathbf{0}$	$\mathbf{u}_G = \mathbf{u}_G^*$

Actions de liaison du corps Ω^* sur la poutre Ω au niveau de la section Σ , pour une liaison parfaite – Résumé 6.13 page 200

Liaisons (Ω/Ω^*)	Résultante et moment de l'action de liaison de Ω^* sur Ω
Articulation ou appui (2D)	$\mathbf{R}$ quelconque (dans le plan) et $\mathbf{M} = \mathbf{0}$
Appui glissant (2D)	$\langle \mathbf{R}, \mathbf{e} \rangle = 0$ et $\mathbf{M} = \mathbf{0}$
Encastrement	$\mathbf{R}$ et $\mathbf{M}$ quelconques
Pivot (d'axe $\mathbf{a}$)	$\mathbf{R}$ quelconque et $\langle \mathbf{M}, \mathbf{a} \rangle = 0$
Sphère-cylindre	$\langle \mathbf{R}, \mathbf{e} \rangle = 0$ et $\mathbf{M} = \mathbf{0}$
Sphérique	$\mathbf{R}$ quelconque et $\mathbf{M} = \mathbf{0}$

A. Algèbre tensorielle

A.1 Vecteurs

A.1.1 Définitions et notations

De façon brève et générale, l'espace tridimensionnel auquel nous nous référerons est un espace $\mathcal{E}$ affine, dont les points sont les éléments. L'espace vectoriel $\mathcal{V}$ sous-jacent comprend alors les vecteurs tridimensionnels, que nous écrirons en gras : $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Pour garder un formalisme unifié, nous allons représenter les points de l'espace $\mathcal{E}$ sous la forme des vecteurs positions qui leur sont associés : considérer le point $A \in \mathcal{E}$ revient à prendre en compte le vecteur position $\mathbf{x}_A \in \mathcal{V}$. Ainsi, les vecteurs de l'espace vectoriel sous-jacent $\mathcal{V}$ pourront également être représentés comme des différences de points de $\mathcal{E}$: le vecteur reliant deux points A et B de $\mathcal{E}$ s'écrira naturellement comme $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$, où $\mathbf{x}_A$ et $\mathbf{x}_B$ sont les vecteurs positions respectivement associés aux points A et B , tandis que le milieu I du segment $[AB]$ est tel que $\mathbf{x}_I = (\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B)/2$, comme représenté sur la figure A.1.

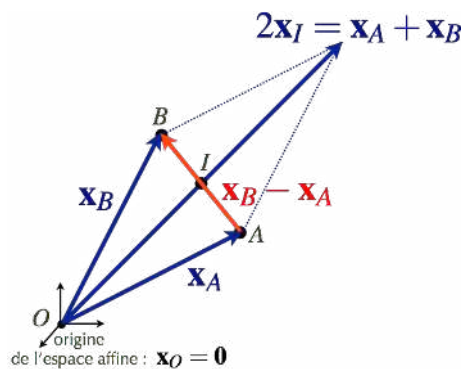


FIGURE A.1 – Points et vecteurs.

Une base vectorielle de $\mathcal{V}$ est une famille de trois vecteurs $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ libre et génératrice de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$. Autrement dit, tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

d'une combinaison linéaire de ces trois vecteurs :

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^3 v_n \mathbf{i}_n$$

où les v_n sont les composantes du vecteur $\mathbf{v}$ dans la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$.

Comme on le verra dans le paragraphe A.1.2, on choisit de façon privilégiée des bases orthonormées, c'est-à-dire qui sont telles que les vecteurs soient orthogonaux deux à deux, et de norme unité. Dans ce cadre, on définit le produit scalaire entre deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ comme la forme bilinéaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$, symétrique et définie positive, qui s'exprime comme :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{n=1}^3 a_n b_n$$

où a_n et b_n sont les composantes respectives de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans la base orthonormée $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$. On définit alors la norme $\|\mathbf{a}\|$ du vecteur $\mathbf{a}$ comme :

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$$

Enfin, on notera le produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ comme $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, dont les composantes c_n dans une base orthonormée $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ vérifient :

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

On rappelle par ailleurs quelques formules classiques autour du produit vectoriel :

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}, \quad \forall \mathbf{a}, \forall \mathbf{b}, \forall \mathbf{c}$$

$$\langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{d}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle, \quad \forall \mathbf{a}, \forall \mathbf{b}, \forall \mathbf{c}, \forall \mathbf{d}$$

dont notamment la formule de Jacobi :

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + \mathbf{b} \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) + \mathbf{c} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{a}, \forall \mathbf{b}, \forall \mathbf{c}$$

et la propriété de permutation du produit mixte :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle, \quad \forall \mathbf{a}, \forall \mathbf{b}, \forall \mathbf{c}$$

A.1.2 Bases classiques

On présente dans ce qui suit trois bases vectorielles orthonormées, particulièrement utilisées en mécanique, car elles sont associées à des géométries de base que l'on peut rencontrer dans la plupart des problèmes considérés.

Base cartésienne

Une base cartésienne se compose de trois vecteurs $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, unitaires et orthogonaux deux à deux, qui ne dépendent d'aucun paramètre. On lui associe alors les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) , de telle façon qu'un point de l'espace vérifie le vecteur position suivant :

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3$$

comme représenté sur la figure A.2.

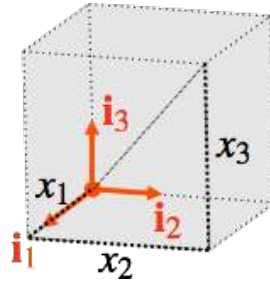


FIGURE A.2 – Base cartésienne et coordonnées associées.

Base cylindrique

Dans le cas d'une géométrie en forme de cylindre de révolution, on peut utiliser une base cylindrique qui se compose de trois vecteurs $(\mathbf{i}_r(\theta), \mathbf{i}_\theta(\theta), \mathbf{i}_z)$, unitaires et orthogonaux deux à deux, où :

- le vecteur $\mathbf{i}_z$ correspond à l'axe du cylindre auquel la base est associée ;
- les deux autres vecteurs peuvent se déduire d'une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ de la section circulaire du cylindre comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_r(\theta) &= \cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \theta \mathbf{i}_2, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[\\ \mathbf{i}_\theta(\theta) &= -\sin \theta \mathbf{i}_1 + \cos \theta \mathbf{i}_2, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

On associe à cette base les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , de telle façon qu'un point de l'espace vérifie le vecteur position suivant :

$$\mathbf{x} = r\mathbf{i}_r(\theta) + z\mathbf{i}_z$$

comme représenté sur la figure A.3.

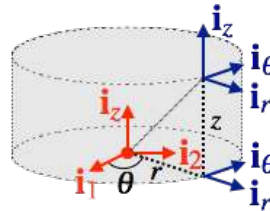


FIGURE A.3 – Base cylindrique et coordonnées associées.

Base sphérique

Dans le cas d'une géométrie en forme de sphère ou de boule, on peut utiliser une base sphérique qui se compose de trois vecteurs $(\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi), \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi), \mathbf{e}_\phi(\phi))$, unitaires et orthogonaux deux à deux, qui peuvent se déduire d'une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ donnée comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) &= \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{i}_1 + \sin \vartheta \sin \phi \mathbf{i}_2 + \cos \vartheta \mathbf{i}_3, \quad \forall \vartheta \in [0, \pi], \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[\\ \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) &= \cos \vartheta \cos \phi \mathbf{i}_1 + \cos \vartheta \sin \phi \mathbf{i}_2 - \sin \vartheta \mathbf{i}_3, \quad \forall \vartheta \in [0, \pi], \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[\\ \mathbf{e}_\phi(\phi) &= -\sin \phi \mathbf{i}_1 + \cos \phi \mathbf{i}_2, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

On associe à cette base les coordonnées sphériques (r, ϑ, ϕ) , de telle façon qu'un point de l'espace vérifie le vecteur position suivant :

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi)$$

comme représenté sur la figure A.4.

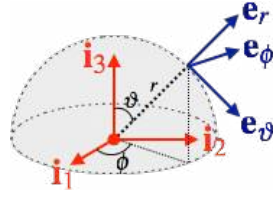


FIGURE A.4 – Base sphérique et coordonnées associées.

A.2 Tenseurs d'ordre deux

A.2.1 Définitions et propriétés

Un tenseur d'ordre deux (noté avec une lettre double : $\mathbb{A}$) est une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même, qui, à tout vecteur $\mathbf{a}$ associe le vecteur $\mathbf{b} = \mathbb{A}(\mathbf{a})$ de composantes :

$$b_m = \sum_{n=1}^3 A_{mn} a_n$$

où a_p et b_p ($1 \leq p \leq 3$) sont les composantes respectives de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans une base orthonormée $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ donnée, et les composantes de $\mathbb{A}$ se définissent comme :

$$A_{mn} = \langle \mathbf{i}_m, \mathbb{A}(\mathbf{i}_n) \rangle, \quad 1 \leq m, n \leq 3$$

Il s'agit donc d'une multiplication $\mathbf{b} = \mathbb{A}\mathbf{a}$ au sens du produit matrice-vecteur, notation que l'on utilise préférentiellement dans ce document. Dans ce cadre, on note $\mathbb{I}$ le tenseur identité, qui est tel que $\mathbb{I}\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a}$, et dont les composantes s'écrivent par conséquent :

$$I_{mn} = \langle \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_n \rangle = \delta_{mn}, \quad 1 \leq m, n \leq 3$$

où δ_{mn} désigne le « delta de Kronecker », défini comme :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Par ailleurs, on utilise la structure de multiplication des tenseurs (non commutative), qui correspond à la composition des applications linéaires ; ainsi, on définit le produit $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ par son effet sur un vecteur $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{b} = \mathbb{C}\mathbf{a} = (\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbf{a} = \mathbb{A}(\mathbb{B}(\mathbf{a}))$$

dont les composantes vérifient donc :

$$b_m = \sum_{n=1}^3 A_{mn} \sum_{p=1}^3 B_{np} a_p$$

ce qui revient à écrire que les composantes du produit $\mathbb{C}$ vérifient :

$$C_{mp} = \sum_{n=1}^3 A_{mn} B_{np}, \quad 1 \leq m, p \leq 3$$

ce qui correspond effectivement à la multiplication de deux matrices. Dans le cas particulier du tenseur identité ($\mathbb{C} = \mathbb{I}$), on appelle inverse de $\mathbb{A}$ le tenseur $\mathbb{A}^{-1}$ vérifiant :

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}$$

et qui correspond donc à l'application réciproque de celle associée au tenseur $\mathbb{A}$.

Enfin, $\mathbb{A}^T$ désigne le tenseur transposé de $\mathbb{A}$, au sens du produit scalaire :

$$\langle \mathbb{A}^T \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbb{A} \mathbf{b} \rangle, \forall \mathbf{a}, \forall \mathbf{b}$$

ce qui permet d'établir que, dans une base orthonormée :

$$(\mathbb{A}^T)_{mn} = \mathbb{A}_{nm}, \quad 1 \leq m, n \leq 3$$

En outre, lorsque le tenseur $\mathbb{A}$ est inversible, on définit l'inverse du transposé comme le transposé de l'inverse, noté $\mathbb{A}^{-T} : (\mathbb{A}^T)^{-1} = \mathbb{A}^{-T} = (\mathbb{A}^{-1})^T$.

Dans une autre base orthogonale $(\mathbf{i}_1^*, \mathbf{i}_2^*, \mathbf{i}_3^*) = (\mathbb{R}\mathbf{i}_1, \mathbb{R}\mathbf{i}_2, \mathbb{R}\mathbf{i}_3)$, reliée à la précédente par une rotation $\mathbb{R}$ de composantes R_{mn} dans la base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, telle que définie dans le paragraphe A.2.6, les composantes de $\mathbb{A}$ sont transformées selon la règle :

$$A_{mn}^* = \langle \mathbf{i}_m^*, \mathbb{A} \mathbf{i}_n^* \rangle = \langle \mathbb{R} \mathbf{i}_m, \mathbb{A} \mathbb{R} \mathbf{i}_n \rangle = \langle \mathbf{i}_m, \mathbb{R}^T \mathbb{A} \mathbb{R} \mathbf{i}_n \rangle = \sum_{1 \leq p, q \leq 3} R_{pm} A_{pq} R_{qn}, \quad 1 \leq m, n \leq 3$$

ce qui correspond à la formule classique de changement de base pour les composantes d'une matrice.

Produit tensoriel de deux vecteurs

On note $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ le produit tensoriel de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, qui constitue un tenseur particulier présentant la propriété suivante :

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{c} = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{c}$$

ce qui peut s'interpréter, en termes de calcul matriciel, comme $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T$ (où la transposée d'un « vecteur colonne » $\mathbf{b}$ est un « vecteur ligne » $\mathbf{b}^T$). Géométriquement, si $\mathbf{e}$ est un vecteur unitaire, $\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$ représente la projection selon la direction $\mathbf{e}$, et, par conséquent, $\mathbb{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$ se traduit comme la projection sur le plan de normale $\mathbf{e}$.

En outre, on notera les relations suivantes, qui, valables quels que soient $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ et $\mathbb{A}$, peuvent faciliter les calculs :

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \quad \text{et} \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}$$

$$\mathbb{A}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbb{A} \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}, \quad \forall \mathbb{A}, \quad \text{et} \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbb{A} = \mathbf{a} \otimes (\mathbb{A}^T \mathbf{b})$$

Enfin, il est facile de constater que le tenseur identité peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{I} = \sum_{n=1}^3 \mathbf{i}_n \otimes \mathbf{i}_n$$

où $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ est une base orthonormée donnée ; ce résultat permet d'obtenir l'écriture d'un tenseur $\mathbb{A}$ sur l'ensemble des produits tensoriels des vecteurs de la base considérée :

$$\mathbb{A} = \sum_{n=1}^3 (\mathbb{A} \mathbf{i}_n) \otimes \mathbf{i}_n = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 A_{mn} \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n$$

où l'on retrouve de façon naturelle les composantes A_{mn} de $\mathbb{A}$.

Partie symétrique et partie antisymétrique

Tout tenseur $\mathbb{A}$ peut se décomposer comme la somme d'une partie symétrique $(\mathbb{A})_S$ et d'une partie antisymétrique $(\mathbb{A})_A$:

$$\mathbb{A} = (\mathbb{A})_S + (\mathbb{A})_A = \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^T)$$

où l'on vérifie aisément que $(\mathbb{A})_S^T = (\mathbb{A})_S$ et $(\mathbb{A})_A^T = -(\mathbb{A})_A$.

Par ailleurs, comme l'antisymétrie entraîne que $\langle (\mathbb{A})_A \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -\langle (\mathbb{A})_A \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$, $\forall \mathbb{A}$, $\forall \mathbf{a}$, on en déduit que ce produit scalaire est nul, ce qui permet d'associer à la partie antisymétrique de $\mathbb{A}$ un vecteur $\mathbf{w}$ tel que l'on ait :

$$(\mathbb{A})_A \mathbf{a} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a}$$

qui est alors le vecteur de composantes :

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{i}_n \rangle = \sum_{m=1}^3 \langle (\mathbb{A})_A \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_n \wedge \mathbf{i}_m \rangle$$

Inversement, connaissant le vecteur $\mathbf{w}$, on construit le tenseur antisymétrique $\mathbb{w}^\wedge$, de composantes :

$$\mathbb{w}_{mn}^\wedge = \langle \mathbf{w}, \mathbf{i}_n \wedge \mathbf{i}_m \rangle$$

De la même façon, il est également possible d'exprimer le double produit vectoriel à l'aide de produits de tenseurs antisymétriques :

$$\mathbf{w}_1 \wedge (\mathbf{w}_2 \wedge \mathbf{a}) = \mathbb{w}_1^\wedge \mathbb{w}_2^\wedge \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a}$$

soit, à l'aide de la formule de Jacobi établie dans le paragraphe A.1.1 :

$$(\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2) \wedge \mathbf{a} = (\mathbb{w}_1^\wedge \mathbb{w}_2^\wedge - \mathbb{w}_2^\wedge \mathbb{w}_1^\wedge) \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a}$$

Enfin, les définitions précédentes peuvent naturellement s'appliquer au produit tensoriel de deux vecteurs, en écrivant :

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes_S \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes_A \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$$

où $\mathbf{a} \otimes_S \mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_S$ et $\mathbf{a} \otimes_A \mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_A$ désignent respectivement les parties symétrique et antisymétrique du produit tensoriel $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$. À la partie antisymétrique correspond donc un vecteur associé au produit vectoriel, qui est simplement $\mathbf{w} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})/2$ vu que l'on a :

$$2(\mathbf{a} \otimes_A \mathbf{b})\mathbf{c} = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}, \quad \forall \mathbf{c}$$

A.2.2 Produit scalaire et norme de tenseurs

Trace d'un tenseur

Afin de pouvoir définir un produit scalaire et une norme tensorielles, on commence par définir la trace d'un tenseur, qui est une forme linéaire notée tr , que l'on peut définir sur l'espace des tenseurs d'ordre deux comme :

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \text{tr}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a}, \forall \mathbf{b}$$

ce qui permet de déduire, par linéarité, l'expression classique :

$$\text{tr} \mathbb{A} = \sum_{n=1}^3 \text{tr}(\mathbb{A}(\mathbf{i}_n \otimes \mathbf{i}_n)) = \sum_{n=1}^3 \text{tr}((\mathbb{A}\mathbf{i}_n) \otimes \mathbf{i}_n) = \sum_{n=1}^3 \langle \mathbb{A}\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_n \rangle = \sum_{n=1}^3 A_{nn}$$

On conclut alors que la trace $\text{tr} \mathbb{A}$ est un invariant du tenseur $\mathbb{A}$: sa valeur ne dépend pas de la base choisie pour exprimer les composantes A_{mn} du tenseur considéré.

Propriétés

Le produit suivant, parfois appelé « produit contracté » (et noté $\mathbb{A} : \mathbb{B}$), est un produit scalaire défini dans l'espace des tenseurs d'ordre deux :

$$\langle \mathbb{A}, \mathbb{B} \rangle = \text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}^T) = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 A_{mn} B_{mn}$$

en considérant les composantes A_{mn} et B_{mn} de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ dans une base donnée. En effet, cette forme est clairement bilinéaire et symétrique, ainsi que définie positive, vu que $\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{A}^T) \geq 0$ et que, si $\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{A}^T) = 0$, alors $\mathbb{A} = 0$ nécessairement.

Ce produit scalaire permet alors de définir une norme tensorielle :

$$\|\mathbb{A}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{A}^T)}$$

et d'obtenir une relation de Schwarz :

$$\left(\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}^T) \right)^2 = \langle \mathbb{A}, \mathbb{B} \rangle^2 \leq \|\mathbb{A}\|^2 \|\mathbb{B}\|^2 = \text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{A}^T) \text{tr}(\mathbb{B}\mathbb{B}^T), \forall \mathbb{A}, \forall \mathbb{B}$$

Enfin, on constate qu'un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique sont orthogonaux l'un de l'autre au sens de ce produit scalaire ; en effet, on a d'une part :

$$\langle (\mathbb{A})_S, \mathbb{B} \rangle = \frac{\langle \mathbb{A} + \mathbb{A}^T, \mathbb{B} \rangle}{2} = \frac{\langle \mathbb{A}, \mathbb{B} + \mathbb{B}^T \rangle}{2} = \langle \mathbb{A}, (\mathbb{B})_S \rangle, \forall \mathbb{A}, \forall \mathbb{B}$$

et, d'autre part :

$$\langle (\mathbb{A})_A, \mathbb{B} \rangle = \frac{\langle \mathbb{A} - \mathbb{A}^T, \mathbb{B} \rangle}{2} = \frac{\langle \mathbb{A}, \mathbb{B} - \mathbb{B}^T \rangle}{2} = \langle \mathbb{A}, (\mathbb{B})_A \rangle, \forall \mathbb{A}, \forall \mathbb{B}$$

ce qui se traduit par :

$$\langle (\mathbb{A})_S, (\mathbb{B})_A \rangle = \text{tr}((\mathbb{A})_S (\mathbb{B})_A^T) = 0, \forall \mathbb{A}, \forall \mathbb{B}$$

A.2.3 Déterminant d'un tenseur et relations remarquables

Définition et propriétés

Une définition pragmatique du déterminant $\det \mathbb{A}$ d'un tenseur $\mathbb{A}$ est de considérer le produit mixte des images de trois vecteurs par l'application linéaire associée à $\mathbb{A}$, en écrivant que :

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{a}, (\mathbb{A}\mathbf{b}) \wedge (\mathbb{A}\mathbf{c}) \rangle = \det \mathbb{A} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle, \forall \mathbf{a}, \forall \mathbf{b}, \forall \mathbf{c}$$

Il est alors facile de montrer que le déterminant se calcule en fonction des composantes A_{mn} du tenseur $\mathbb{A}$ dans une base orthonormée $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ donnée comme :

$$\det \mathbb{A} = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}A_{13} - A_{21}A_{12}A_{33} - A_{11}A_{32}A_{23}$$

où l'on reconnaît la « règle de Sarrus » de calcul du déterminant de trois vecteurs de dimension trois ; cependant, le déterminant $\det \mathbb{A}$ est un invariant du tenseur $\mathbb{A}$, dans la mesure où sa valeur ne dépend pas de la base choisie pour exprimer les composantes A_{mn} du tenseur considéré.

On montre alors que le déterminant d'un produit de tenseurs est le produit des déterminants :

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (\det \mathbb{A})(\det \mathbb{B}), \forall \mathbb{A}, \forall \mathbb{B}$$

et donc que le déterminant de l'inverse d'un tenseur est l'inverse du déterminant :

$$\det(\mathbb{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbb{A}}, \forall \mathbb{A} \text{ inversible}$$

et qu'un tenseur est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Formule de Piola

En utilisant la définition précédente, il est possible d'écrire, pour trois vecteurs arbitraires et un tenseur $\mathbb{A}$ inversible :

$$\det \mathbb{A} \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbb{A}\mathbf{c}, (\mathbb{A}\mathbf{a}) \wedge (\mathbb{A}\mathbf{b}) \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbb{A}^T ((\mathbb{A}\mathbf{a}) \wedge (\mathbb{A}\mathbf{b})) \rangle, \forall \mathbf{c}$$

d'où, finalement :

$$(\mathbb{A}\mathbf{b}) \wedge (\mathbb{A}\mathbf{b}) = (\det \mathbb{A}) \mathbb{A}^{-T} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), \forall \mathbf{a}, \forall \mathbf{b}$$

Dans le cas d'un tenseur de rotation (défini dans le paragraphe A.2.6), qui vérifie alors $\mathbb{R}^T \mathbb{R} = \mathbb{I}$ et $\det \mathbb{R} = 1$, la formule de Piola permet d'établir la propriété de distributivité du tenseur de rotation sur le produit vectoriel :

$$\mathbb{R}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbb{R}\mathbf{a}) \wedge (\mathbb{R}\mathbf{b}), \forall \mathbf{a}, \forall \mathbf{b}$$

A.2.4 Invariants d'un tenseur

Décomposition spectrale d'un tenseur

Les vecteurs propres ϕ_k et valeurs propres λ_k d'un tenseur $\mathbb{A}$ sont des quantités intrinsèques attachées à celui-ci, et qui vérifient :

$$\mathbb{A}\phi_k = \lambda_k \phi_k, 1 \leq k \leq 3$$

Ces quantités ne dépendent pas de la base choisie pour exprimer les composantes du tenseur $\mathbb{A}$.

On peut montrer que, si $\mathbb{A}$ est symétrique, il admet trois valeurs propres réelles, auxquelles on peut associer une base orthonormée de vecteurs propres, que l'on appelle souvent en mécanique « directions principales ». Ces dernières ont alors un sens physique particulier selon la nature du tenseur $\mathbb{A}$ considéré ; mathématiquement, le tenseur $\mathbb{A}$ est diagonal dans sa base de directions propres.

Invariants

On peut montrer que les valeurs propres d'un tenseur $\mathbb{A}$ sont les racines du polynôme caractéristique $\mathcal{P}(\lambda)$ qui s'exprime comme :

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda^3 + i_1(\mathbb{A})\lambda^2 - i_2(\mathbb{A})\lambda + i_3(\mathbb{A})$$

où les scalaires $i_k(\mathbb{A})$ sont les « invariants principaux » du tenseur $\mathbb{A}$:

$$\begin{aligned} i_1(\mathbb{A}) &= \text{tr } \mathbb{A} \\ i_2(\mathbb{A}) &= \frac{(\text{tr } \mathbb{A})^2 - \text{tr}(\mathbb{A}^2)}{2} \\ i_3(\mathbb{A}) &= \det \mathbb{A} \end{aligned}$$

soit, en fonction des valeurs propres λ_k :

$$\begin{aligned} i_1(\mathbb{A}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ i_2(\mathbb{A}) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ i_3(\mathbb{A}) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

Ces grandeurs sont donc des invariants au sens où elles ne sont pas affectées par un changement de base d'expression des composantes du tenseur $\mathbb{A}$.

A.2.5 Racine carrée d'un tenseur

Définition et propriétés

Un tenseur $\mathbb{A}$ symétrique est dit positif si ses valeurs propres sont toutes positives ; dans ce cas, en l'exprimant sur la base associée de ses vecteurs propres, il est possible de définir la racine carrée $\mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$ comme le tenseur diagonal dans cette même base, de composantes diagonales les racines carrées des valeurs propres de $\mathbb{A}$. On a alors de manière évidente que $\mathbb{U}^2 = \mathbb{A}$.

Par définition, la racine carrée $\mathbb{U}$ est également un tenseur positif et symétrique ; de plus, si $\mathbb{A}$ est défini positif, $\mathbb{U}$ l'est aussi. Par conséquent, la racine carrée $\mathbb{U}$ est inversible si et seulement si $\mathbb{A}$ est inversible.

Décomposition polaire d'un tenseur

Si $\mathbb{A}$ est un tenseur tel que $\det \mathbb{A} > 0$, il admet la décomposition unique suivante, appelée « décomposition polaire » :

$$\mathbb{A} = \mathbb{R}\mathbb{U} = \mathbb{V}\mathbb{R}$$

où $\mathbb{R}$ est un tenseur de rotation (défini dans le paragraphe A.2.6), et où $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont les racines carrées de $\mathbb{A}^T \mathbb{A}$ et $\mathbb{A} \mathbb{A}^T$ respectivement :

$$\mathbb{U}^2 = \mathbb{A}^T \mathbb{A}, \text{ et } \mathbb{V}^2 = \mathbb{A} \mathbb{A}^T$$

En effet, une fois que l'on a construit $\mathbb{U}$, il est facile de vérifier que $\mathbb{A}\mathbb{U}^{-1}$ est un tenseur orthogonal, c'est-à-dire de rotation :

$$(\mathbb{A}\mathbb{U}^{-1})^T (\mathbb{A}\mathbb{U}^{-1}) = \mathbb{U}^{-T} \mathbb{A}^T \mathbb{A} \mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^{-1} \mathbb{U}^2 \mathbb{U}^{-1} = \mathbb{I}$$

et, de même, avec $\mathbb{V}$. Enfin, on vérifie facilement que $\mathbb{V} = \mathbb{R}\mathbb{U}\mathbb{R}^T$.

A.2.6 Tenseurs de rotation

On présente dans ce qui suit un tenseur qui joue un rôle important dans la description des mouvements d'un milieu matériel. Il permet notamment de traduire un mouvement qui se fait sans déformation, comme celui présenté dans l'exemple 1.3 page 6.

Définition et propriétés

Un tenseur de rotation $\mathbb{R}$ est un tenseur orthogonal, c'est-à-dire qui vérifie la propriété suivante :

$$\mathbb{R}^T \mathbb{R} = \mathbb{I}$$

Ainsi, lorsqu'il est exprimé dans une base orthonormée $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ donnée, les vecteurs colonnes de la matrice associée sont de norme unité et doivent être orthogonaux entre eux :

$$\langle \mathbb{R}\mathbf{i}_m, \mathbb{R}\mathbf{i}_n \rangle = \langle \mathbb{R}^T \mathbb{R}\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_n \rangle = \langle \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_n \rangle = \delta_{mn}, \forall m, n$$

d'où le nom de matrice orthogonale. Ces six relations scalaires sont indépendantes et portent sur les neuf composantes scalaires de la matrice $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'un tenseur de rotation peut être paramétré par trois quantités scalaires indépendantes.

En outre, la propriété d'orthogonalité implique que $\mathbb{R}^T = \mathbb{R}^{-1}$, et, par conséquent, que l'on a également la relation $\mathbb{R}\mathbb{R}^T = \mathbb{I}$. De plus, comme $\mathbb{R}^T \mathbb{R} = \mathbb{I}$, on a $(\det \mathbb{R})^2 = (\det \mathbb{R}^T)(\det \mathbb{R}) = \det(\mathbb{R}^T \mathbb{R}) = \det \mathbb{I} = 1$, d'où :

$$\det \mathbb{R} = 1$$

en considérant que les rotations ne changent pas l'orientation de l'espace (contrairement aux réflexions dont le déterminant est égal à -1).

Mathématiquement aussi bien que physiquement, un tenseur de rotation est une isométrie, car l'application associée conserve les distances, comme on le constate avec un vecteur $\mathbf{c}$ arbitraire :

$$\|\mathbb{R}\mathbf{c}\|^2 = \langle \mathbb{R}\mathbf{c}, \mathbb{R}\mathbf{c} \rangle = \langle \mathbb{R}^T \mathbb{R} \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = \|\mathbf{c}\|^2, \forall \mathbf{c}$$

ce qui explique qu'il puisse traduire le mouvement d'un milieu indéformable.

En outre, la recherche des valeurs propres λ_k et vecteurs propres ϕ_k du tenseur $\mathbb{R}$ revient à résoudre :

$$\mathbb{R}\phi_k = \lambda_k \phi_k, \quad 1 \leq k \leq 3$$

La propriété d'orthogonalité de $\mathbb{R}$ implique donc que $\|\phi_k\|^2 = \langle \mathbb{R}\phi_k, \mathbb{R}\phi_k \rangle = |\lambda_k|^2 \|\phi_k\|^2$, d'où :

$$|\lambda_k| = 1$$

sachant que l'on a également $\det \mathbb{R} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Comme ces valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique $\mathcal{P}(\lambda) = \det(\mathbb{R} - \lambda \mathbb{I})$ qui est de degré impair, au moins l'une de ces valeurs propres est réelle, et donc, nécessairement, on a :

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{i\varphi}, \lambda_3 = e^{-i\varphi} = \bar{\lambda}_2$$

Le vecteur propre ϕ_1 associé à $\lambda_1 = 1$ est donc réel et peut s'interpréter géométriquement comme l'axe de la rotation, vu que $\mathbb{R}\phi_1 = \phi_1$: tout vecteur colinéaire à ϕ_1 est inchangé par la rotation $\mathbb{R}$.

Axe et angle d'une rotation

On vient de voir qu'il est possible d'associer à tout tenseur de rotation $\mathbb{R}$ une direction qui le caractérise, que l'on notera $\mathbf{e}$, qui est un vecteur unitaire vérifiant $\mathbb{R}\mathbf{e} = \mathbf{e}$. De même, nous allons voir dans la suite comment définir l'angle de la rotation autour de l'axe $\mathbf{e}$ à partir du tenseur $\mathbb{R}$.

Considérons un vecteur arbitraire $\mathbf{c}$ et son image $\mathbb{R}\mathbf{c}$ par la rotation. Comme cette dernière est une isométrie, ces deux vecteurs ont même norme, et il est donc possible de les « placer » comme représenté sur la figure A.5 : les deux extrémités sont donc dans un même plan perpendiculaire à l'axe $\mathbf{e}$, et forment dans ce plan un angle φ . On peut alors décomposer $\mathbb{R}\mathbf{c}$ comme :

$$\mathbb{R}\mathbf{c} = \langle \mathbb{R}\mathbf{c}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} + (\mathbb{R}\mathbf{c})_{\perp} = \langle \mathbf{c}, \mathbb{R}^T \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} + (\mathbb{R}\mathbf{c})_{\perp} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} + (\mathbb{R}\mathbf{c})_{\perp}$$

où $(\mathbb{R}\mathbf{c})_{\perp}$ désigne la composante de $\mathbb{R}\mathbf{c}$ contenue dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{e}$. Celle-ci peut alors s'exprimer à l'aide de deux vecteurs orthogonaux $\mathbf{e} \wedge \mathbf{c}$ et $\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{c})$ formant une base de ce plan particulier :

$$(\mathbb{R}\mathbf{c})_{\perp} = \sin \varphi \mathbf{e} \wedge \mathbf{c} - \cos \varphi \mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{c})$$

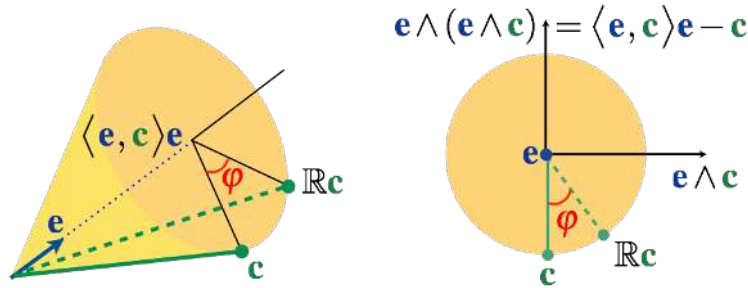


FIGURE A.5 – Paramétrage axio-angulaire d'une rotation d'axe $\mathbf{e}$ et d'angle φ .

En développant le double produit vectoriel comme $\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{c}) = \langle \mathbf{e}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{e} - \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{c}$, et en sachant que $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 1$, on obtient finalement :

$$\mathbb{R}\mathbf{c} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} + \sin \varphi \mathbf{e} \wedge \mathbf{c} - \cos \varphi \langle \mathbf{c}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{e} + \cos \varphi \mathbf{c}$$

soit encore, en notant $\mathbf{e}^\wedge$ le tenseur antisymétrique, défini dans l'annexe A.2.1, et défini comme $\mathbf{e}^\wedge \mathbf{c} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{c}$, $\forall \mathbf{c}$, l'expression suivante :

$$\mathbb{R} = \cos \varphi \mathbb{I} + (1 - \cos \varphi) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \sin \varphi \mathbf{e}^\wedge = \mathbb{Q}(\mathbf{e}, \varphi)$$

Avec ce paramétrage, qualifié d'« axio-angulaire », on retrouve notamment qu'à une rotation donnée correspondent trois paramètres indépendants : deux qui définissent la direction de l'axe (vu que $\mathbf{e}$ est un vecteur unitaire), et un qui est l'angle.

Il reste à voir maintenant si la réciproque est possible, c'est-à-dire si l'on peut trouver $\mathbf{e}$ et φ à partir de la donnée d'une matrice de rotation $\mathbb{R}$ quelconque. Pour cela, on sait déjà que $\mathbb{R} = 1 + 2 \cos \varphi$, et donc que :

$$\varphi = \pm \arccos \left(\frac{\text{tr} \mathbb{R} - 1}{2} \right)$$

puis, pour déterminer l'axe, il suffit d'écrire que, si $\sin \varphi \neq 0$, on a :

$$\mathbf{e}^\wedge = \frac{1}{2 \sin \varphi} (\mathbb{R} - \mathbb{R}^T)$$

d'où l'expression des composantes de $\mathbf{e}$ dans une base donnée. Le choix du signe de φ importe peu, vu que changer le signe de l'angle revient à changer le sens du vecteur unitaire de l'axe de la rotation.

Dans le cas particulier où $\sin \varphi = 0$, c'est-à-dire si $\varphi \equiv 0 \pmod{\pi}$, comme $\text{tr} \mathbb{R} = 1 + 2 \cos \varphi$, on obtient deux cas de figure :

- si $\text{tr} \mathbb{R} = 3$, alors $\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$: la rotation est en fait l'identité $\mathbb{I}$, et $\mathbf{e}$ est donc arbitraire ;
- si $\text{tr} \mathbb{R} = -1$, alors $\varphi \equiv \pi \pmod{2\pi}$: la rotation s'écrit en fait $\mathbb{R} = -\mathbb{I} + 2\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$ et $\mathbf{e}$ se déduit donc directement de la relation $\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} = (\mathbb{I} + \mathbb{R})/2$.

En dehors de ces derniers cas, pour lesquels la singularité peut tout de même être levée, le paramétrage axio-angulaire d'une rotation est donc inversible.

Cas d'une « petite » rotation

Dans le cas où l'angle de la rotation φ est très petit devant 1, on peut simplifier l'expression du paramétrage axio-angulaire de la petite rotation comme :

$$\mathbb{R} = \mathbb{I} + \varphi \mathbf{e}^\wedge + O(\varphi^2)$$

Si cette rotation intervient pour exprimer le placement d'un point, ceci implique que le déplacement associé $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$ vérifie :

$$\mathbf{u} = (\mathbb{R} - \mathbb{I})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_O) = \varphi \mathbf{e} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{p}_O)$$

où O est un point de l'axe de la rotation. Cette expression est utilisée en mécanique des milieux continus pour préciser des conditions aux limites en rotation dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Elle sert également en mécanique des poutres, dans le paragraphe 6.1.2, pour exprimer la cinématique approchée d'une poutre.

A.3 Tenseurs d'ordre quatre

A.3.1 Définition et propriétés

Un tenseur d'ordre quatre $\mathbf{T}$ est une application linéaire de l'espace des tenseurs d'ordre deux dans lui-même, qui, à tout tenseur $\mathbb{A}$ associe le tenseur $\mathbb{B} = \mathbf{T}(\mathbb{A})$ de composantes :

$$B_{mn} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 T_{mnpq} A_{pq}, \quad 1 \leq m, n \leq 3$$

où A_{pq} et B_{mn} ($1 \leq m, n, p, q \leq 3$) sont les composantes respectives de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ dans une base orthonormée $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ donnée, et les composantes de $\mathbf{T}$ s'obtiennent comme :

$$T_{mnpq} = \text{tr} \left((\mathbf{T}(\mathbf{i}_p \otimes \mathbf{i}_q))(\mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n) \right)$$

Il s'agit donc d'une multiplication $\mathbb{B} = \mathbf{T}\mathbb{A}$ au sens d'un produit matrice-vecteur si l'on adopte la notation de Voigt, définie dans le paragraphe 4.1.3, dans le cas de tenseurs $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ symétriques, et d'un tenseur $\mathbf{T}$ vérifiant la grande symétrie :

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 = B_{11} \\ \tilde{B}_2 = B_{22} \\ \tilde{B}_3 = B_{33} \\ \tilde{B}_4 = B_{23} \\ \tilde{B}_5 = B_{13} \\ \tilde{B}_6 = B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{13} & \tilde{T}_{14} & \tilde{T}_{15} & \tilde{T}_{16} \\ \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{22} & \tilde{T}_{23} & \tilde{T}_{24} & \tilde{T}_{25} & \tilde{T}_{26} \\ \tilde{T}_{13} & \tilde{T}_{23} & \tilde{T}_{33} & \tilde{T}_{34} & \tilde{T}_{35} & \tilde{T}_{36} \\ \tilde{T}_{14} & \tilde{T}_{24} & \tilde{T}_{34} & \tilde{T}_{44} & \tilde{T}_{45} & \tilde{T}_{46} \\ \tilde{T}_{15} & \tilde{T}_{25} & \tilde{T}_{35} & \tilde{T}_{45} & \tilde{T}_{55} & \tilde{T}_{56} \\ \tilde{T}_{16} & \tilde{T}_{26} & \tilde{T}_{36} & \tilde{T}_{46} & \tilde{T}_{56} & \tilde{T}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 = A_{11} \\ \tilde{A}_2 = A_{22} \\ \tilde{A}_3 = A_{33} \\ \tilde{A}_4 = 2A_{23} \\ \tilde{A}_5 = 2A_{13} \\ \tilde{A}_6 = 2A_{12} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, on peut également définir le produit tensoriel $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ de deux tenseurs $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, qui est un tenseur d'ordre quatre tel que :

$$(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B})\mathbb{C} = \langle \mathbb{B}, \mathbb{C} \rangle \mathbb{A} = \text{tr}(\mathbb{B}\mathbb{C}^T) \mathbb{A}, \quad \forall \mathbb{C}$$

de composantes $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B})_{mnpq} = A_{mn}B_{pq}$ dans une base orthonormée $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$.

A.3.2 Formes particulières

Dans le cas de tenseurs agissant dans des espaces de tenseurs symétriques, et présentant la propriété de grande symétrie, la notation de Voigt utilisée plus haut permet de constater que 21 des 36 composantes sont indépendantes. Il est possible de réduire ce nombre dans le cas où le tenseur d'ordre quatre est invariant quand certaines transformations lui sont appliquées.

Orthotropie

Si le tenseur $\mathbf{T}$ est invariant par symétrie par rapport à trois plans de normales perpendiculaires, que l'on suppose orientées selon les trois vecteurs d'une base $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, certaines composantes de $\mathbf{T}$ s'annulent, et ce dernier peut alors s'écrire, avec la notation de Voigt, comme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 = B_{11} \\ \tilde{B}_2 = B_{22} \\ \tilde{B}_3 = B_{33} \\ \tilde{B}_4 = B_{23} \\ \tilde{B}_5 = B_{13} \\ \tilde{B}_6 = B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{22} & \tilde{T}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{T}_{13} & \tilde{T}_{23} & \tilde{T}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 = A_{11} \\ \tilde{A}_2 = A_{22} \\ \tilde{A}_3 = A_{33} \\ \tilde{A}_4 = 2A_{23} \\ \tilde{A}_5 = 2A_{13} \\ \tilde{A}_6 = 2A_{12} \end{pmatrix}$$

soit 9 composantes indépendantes.

Symétrie cubique

Si, comme dans le cas précédent, le tenseur $\mathbf{T}$ est invariant par symétrie par rapport à trois plans de normales perpendiculaires, mais que, en outre, ces trois directions sont équivalentes, ce tenseur peut alors s'écrire, avec la notation de Voigt, comme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 = B_{11} \\ \tilde{B}_2 = B_{22} \\ \tilde{B}_3 = B_{33} \\ \tilde{B}_4 = B_{23} \\ \tilde{B}_5 = B_{13} \\ \tilde{B}_6 = B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 = A_{11} \\ \tilde{A}_2 = A_{22} \\ \tilde{A}_3 = A_{33} \\ \tilde{A}_4 = 2A_{23} \\ \tilde{A}_5 = 2A_{13} \\ \tilde{A}_6 = 2A_{12} \end{pmatrix}$$

soit 3 composantes indépendantes.

Isotropie transverse

Si le tenseur $\mathbf{T}$ est invariant par rotation autour d'un axe fixe $\mathbf{i}_3$, il peut s'écrire, avec la notation de Voigt, comme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 = B_{11} \\ \tilde{B}_2 = B_{22} \\ \tilde{B}_3 = B_{33} \\ \tilde{B}_4 = B_{23} \\ \tilde{B}_5 = B_{13} \\ \tilde{B}_6 = B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{T}_{13} & \tilde{T}_{13} & \tilde{T}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 = A_{11} \\ \tilde{A}_2 = A_{22} \\ \tilde{A}_3 = A_{33} \\ \tilde{A}_4 = 2A_{23} \\ \tilde{A}_5 = 2A_{13} \\ \tilde{A}_6 = 2A_{12} \end{pmatrix}$$

soit 5 composantes indépendantes.

Isotropie

Si le tenseur $\mathbf{T}$ est invariant par rotation, quelle qu'elle soit, il peut s'écrire simplement, avec la notation de Voigt, comme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 = B_{11} \\ \tilde{B}_2 = B_{22} \\ \tilde{B}_3 = B_{33} \\ \tilde{B}_4 = B_{23} \\ \tilde{B}_5 = B_{13} \\ \tilde{B}_6 = B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{12} & \tilde{T}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 = A_{11} \\ \tilde{A}_2 = A_{22} \\ \tilde{A}_3 = A_{33} \\ \tilde{A}_4 = 2A_{23} \\ \tilde{A}_5 = 2A_{13} \\ \tilde{A}_6 = 2A_{12} \end{pmatrix}$$

soit 2 composantes indépendantes. Ce résultat correspond en fait au théorème de Rivlin-Ericksen, dans le cas linéaire, dont on rappelle l'énoncé ci-dessous.

Théorème de représentation de Rivlin-Ericksen (cas linéaire). Un tenseur d'ordre quatre $\mathbf{T}$, agissant de l'espace des tenseurs d'ordre deux symétriques dans lui-même, est dit isotrope si et seulement s'il vérifie :

$$\mathbb{R}(\mathbf{T}\mathbb{A})\mathbb{R}^T = \mathbf{T}(\mathbb{R}\mathbb{A}\mathbb{R}^T), \quad \forall \mathbb{A} \text{ symétrique}, \forall \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbb{R}\mathbb{R}^T = \mathbb{I}$$

Alors il existe deux scalaires α et β tels que l'on peut exprimer le tenseur $\mathbf{T}$ comme :

$$\mathbf{T}\mathbb{A} = \alpha\mathbb{A} + \beta(\text{tr } \mathbb{A})\mathbb{I}, \quad \forall \mathbb{A} \text{ symétrique}$$

On détaille dans ce qui suit une démonstration de ce théorème.

Soit $\mathbb{A}$ un tenseur d'ordre deux symétrique : on peut alors écrire ce tenseur à l'aide de la base des vecteurs propres associés (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) :

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k \otimes \phi_k$$

où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont les valeurs propres associées. Par ailleurs, pour tout tenseur $\mathbb{B}$, on a :

$$\mathbb{B}(\phi_k \otimes \phi_k)\mathbb{B}^T = (\mathbb{B}\phi_k) \otimes (\mathbb{B}\phi_k)$$

En utilisant cette relation pour $\mathbb{B} = \mathbb{S}_k = \mathbb{I} - 2\phi_k \otimes \phi_k$ (qui correspond alors à la symétrie par rapport au plan de normale ϕ_k), on obtient alors que :

$$\mathbb{S}_k(\phi_k \otimes \phi_k)\mathbb{S}_k^T = (\mathbb{S}_k\phi_k) \otimes (\mathbb{S}_k\phi_k) = (-\phi_k) \otimes (-\phi_k) = \phi_k \otimes \phi_k$$

ce qui implique que :

$$\mathbb{S}_k \mathbb{A} \mathbb{S}_k^T = \mathbb{A}$$

Soit maintenant $\mathbf{T}$ un tenseur d'ordre quatre isotrope, agissant de l'espace des tenseurs d'ordre deux symétriques dans lui-même ; comme le tenseur $\mathbb{S}_k$ est orthogonal ($\mathbb{S}_k \mathbb{S}_k^T = \mathbb{I}$), le tenseur $\mathbf{T}$ vérifie alors :

$$\mathbb{S}_k (\mathbf{T} \mathbb{A}) \mathbb{S}_k^T = \mathbf{T} (\mathbb{S}_k \mathbb{A} \mathbb{S}_k^T) = \mathbf{T} \mathbb{A}$$

ce qui nous permet notamment d'établir que :

$$\mathbb{S}_k ((\mathbf{T} \mathbb{A}) \phi_k) = (\mathbf{T} \mathbb{A}) \mathbb{S}_k \phi_k = -(\mathbf{T} \mathbb{A}) \phi_k$$

ce qui signifie que le symétrique de $(\mathbf{T} \mathbb{A}) \phi_k$ par rapport au plan de normale ϕ_k est égal à son opposé, ce qui ne peut arriver que si $(\mathbf{T} \mathbb{A}) \phi_k$ est colinéaire à ϕ_k :

$$((\mathbf{T} \mathbb{A}) \phi_k) \wedge \phi_k = \mathbf{0}$$

ce qui revient à dire que ϕ_k est un vecteur propre de $\mathbf{T} \mathbb{A}$.

Soit $\mathbf{e}$ un vecteur unitaire quelconque ; le tenseur $\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$ est symétrique, et admet alors comme vecteurs propres $\mathbf{e}$ (de valeur propre associée 1), et tout vecteur perpendiculaire à $\mathbf{e}$ (de valeur propre associée nulle). On sait alors, grâce à ce qui précède, que $\mathbf{T}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})$ a les mêmes vecteurs propres que $\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$, et peut alors s'écrire comme :

$$\mathbf{T}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) = \alpha(\mathbf{e})(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \beta(\mathbf{e})\mathbb{I}$$

où α et β sont des fonctions scalaires de $\mathbf{e}$.

Soient maintenant $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ deux vecteurs unitaires quelconques ; on peut alors trouver un tenseur orthogonal $\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{R}\mathbf{e} = \mathbf{f}$, d'où, si $\mathbf{T}$ est isotrope :

$$\mathbf{T}(\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}) = \mathbf{T}((\mathbb{R}\mathbf{e}) \otimes (\mathbb{R}\mathbf{e})) = \mathbf{T}(\mathbb{R}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\mathbb{R}^T) = \mathbb{R}(\mathbf{T}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}))\mathbb{R}^T$$

et en introduisant la forme en fonction des fonctions α et β , on aboutit à :

$$(\alpha(\mathbf{e}) - \alpha(\mathbf{f}))(\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}) + (\beta(\mathbf{e}) - \beta(\mathbf{f}))\mathbb{I} = \mathbf{0}$$

ce qui implique que, nécessairement :

$$\alpha(\mathbf{e}) = \alpha(\mathbf{f}), \text{ et } \beta(\mathbf{e}) = \beta(\mathbf{f}), \forall \mathbf{e}, \forall \mathbf{f}$$

ou, autrement dit, que les scalaires α et β sont constants ; on a ainsi :

$$\mathbf{T}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) = \alpha(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \beta\mathbb{I}$$

En écrivant de nouveau $\mathbb{A}$ dans la base de ses vecteurs propres, on établit enfin, grâce à la linéarité de $\mathbf{T}$, que :

$$\mathbf{T} \mathbb{A} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mathbf{T}(\phi_k \otimes \phi_k) = \alpha \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k \otimes \phi_k \right) + \beta \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_k \right) \mathbb{I} = \alpha \mathbb{A} + \beta(\text{tr } \mathbb{A})\mathbb{I}$$

c'est-à-dire le résultat souhaité.

B. Analyse tensorielle

B.1 Dérivation

B.1.1 Opérateurs spatiaux classiques

On souhaite dans ce qui suit caractériser, par l'intermédiaire de différents opérateurs, l'évolution spatiale de champs scalaires ou vectoriels ; $\mathbf{x}$ désignera le vecteur position du point courant.

Gradient

On définit le gradient spatial d'une fonction scalaire $\phi(\mathbf{x})$ comme le vecteur noté $\nabla_{\mathbf{x}}\phi$ tel que :

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}), \mathbf{c} \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{c}) - \phi(\mathbf{x})}{\alpha}, \quad \forall \mathbf{x}$$

où $\mathbf{c}$ est un vecteur constant arbitraire ; en choisissant une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ de coordonnées associées (x_1, x_2, x_3) , on détermine alors les composantes du gradient comme :

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}), \mathbf{i}_n \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{i}_n) - \phi(\mathbf{x})}{\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \quad 1 \leq n \leq 3$$

Dans le cas d'un champ de vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, on peut définir de manière analogue le gradient $\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$ comme l'application linéaire qui, à tout vecteur constant $\mathbf{c}$, associe le vecteur $(\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{v})\mathbf{c}$ tel que :

$$(\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{x}))\mathbf{c} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{c}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\alpha}, \quad \forall \mathbf{x}$$

Les composantes de ce tenseur, aussi appelé « matrice jacobienne », s'obtiennent comme :

$$(\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{v})_{mn} = \langle (\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{v})\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_m \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n}, \mathbf{i}_m \right\rangle = \frac{\partial v_m}{\partial x_n}, \quad 1 \leq m, n \leq 3$$

(où les v_m sont les composantes de $\mathbf{v}$ dans la base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$), ce qui permet d'exprimer le tenseur gradient sous forme intrinsèque, à l'aide de produits tensoriels, comme :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{v} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n} \otimes \mathbf{i}_n$$

Divergence

Par définition, on pose que la divergence d'un champ de vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ est la trace du tenseur gradient de ce champ :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \operatorname{tr}(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = \sum_{n=1}^3 \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_n}, \mathbf{i}_n \right\rangle$$

Pour un tenseur $\mathbb{A}(\mathbf{x})$, on définit la divergence à partir de celle d'un vecteur en posant que :

$$\langle \mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{A}, \mathbf{c} \rangle = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\mathbb{A}^T \mathbf{c})$$

pour $\mathbf{c}$ constant et arbitraire, ce qui permet d'aboutir, en choisissant une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ de coordonnées associées (x_1, x_2, x_3) , à :

$$\langle \mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{A}, \mathbf{i}_m \rangle = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\mathbb{A}^T \mathbf{i}_m) = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial A_{mn}}{\partial x_n}, \quad 1 \leq m \leq 3$$

où l'on retrouve la divergence, exprimée en coordonnées cartésiennes, des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.

Par ailleurs, on peut montrer la relation suivante, très utile pour simplifier les calculs :

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{w} + (\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{w}) \mathbf{v}$$

(où $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ sont deux champs de vecteurs), ainsi que les deux formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}_{\mathbf{x}} (\phi \mathbb{A}) &= \phi \mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{A} + \mathbb{A} \nabla_{\mathbf{x}} \phi \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\mathbb{A}^T \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{A}, \mathbf{v} \rangle + \operatorname{tr} (\mathbb{A} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v})^T) \end{aligned}$$

où $\phi(\mathbf{x})$ est un champ scalaire et $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ un champ de vecteur.

Rotationnel

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ est défini par :

$$(\mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} - (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v})^T) \mathbf{c}$$

où $\mathbf{c}$ est un vecteur constant arbitraire ; il s'agit ainsi du vecteur correspondant à la partie antisymétrique (à un facteur deux près) du tenseur gradient du champ vectoriel, introduite dans le paragraphe A.2.1 ; en choisissant une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, de coordonnées associées (x_1, x_2, x_3) , on peut ainsi déterminer les composantes de $\mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}$.

On définit en outre le rotationnel d'un tenseur $\mathbb{A}(\mathbf{x})$ d'ordre deux à partir du rotationnel d'un vecteur, en écrivant que :

$$(\mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbb{A}) \mathbf{c} = \mathbf{rot}_{\mathbf{x}} (\mathbb{A}^T \mathbf{c})$$

pour tout vecteur $\mathbf{c}$ constant ; on a alors en particulier :

$$(\mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbb{A}) \mathbf{i}_n = \mathbf{rot}_{\mathbf{x}} (\mathbb{A}^T \mathbf{i}_n), \quad 1 \leq n \leq 3$$

montrant que les colonnes du tenseur dans la base correspondent aux rotationnels des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.

Laplacien

On définit le laplacien d'un champ de vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ comme suit :

$$\Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \mathbf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v})$$

ce qui, en termes de composantes dans une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, de coordonnées associées (x_1, x_2, x_3) , revient à :

$$\langle \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v}, \mathbf{i}_m \rangle = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{i}_m \rangle = \Delta_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}, \mathbf{i}_m \rangle, \quad 1 \leq m \leq 3$$

où $\Delta_{\mathbf{x}}$ est le laplacien scalaire, défini comme :

$$\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x})$$

B.1.2 Formules utiles

On note tout d'abord deux propriétés fondamentales :

$$\mathbf{rot}_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}} \phi) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = 0$$

où, comme dans ce qui suit, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ est un champ de vecteur, et $\phi(\mathbf{x})$ un champ scalaire.

Relations vectorielles

On suppose dans les relations suivantes que $\mathbf{c}$ est un vecteur constant :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v})^T \mathbf{c}$$

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{c}) = \langle \mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle$$

$$\mathbf{rot}_{\mathbf{x}}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{c} - (\mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \mathbf{c}$$

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}}(\phi \mathbf{c}) = \mathbf{c} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} \phi$$

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}}(\phi \mathbf{c}) = \langle \nabla_{\mathbf{x}} \phi, \mathbf{c} \rangle$$

$$\mathbf{rot}_{\mathbf{x}}(\phi \mathbf{c}) = (\nabla_{\mathbf{x}} \phi) \wedge \mathbf{c}$$

Relations tensorielles

Dans ce qui suit, $\mathbb{A}(\mathbf{x})$ est un tenseur d'ordre deux quelconque, tandis que $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ est toujours un champ vectoriel :

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) - \mathbf{rot}_{\mathbf{x}}(\mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{v})$$

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}}((\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v})^T) = \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v})$$

$$\mathbf{rot}_{\mathbf{x}}(\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{rot}_{\mathbf{x}}((\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{v})^T) = \mathbb{D}_{\mathbf{x}}(\mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{v})$$

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbb{A}) = \mathbf{rot}_{\mathbf{x}}(\mathbf{div}_{\mathbf{x}}(\mathbb{A}^T))$$

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}}((\mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbb{A})^T) = \mathbf{0}$$

Enfin, si $\mathbb{A}$ est un tenseur d'ordre deux symétrique, on a la propriété suivante :

$$\mathbf{tr}(\mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \mathbb{A}) = 0$$

B.1.3 Dérivation temporelle

Principe général

Pour définir la dérivée par rapport au temps d'un vecteur, on peut utiliser la définition « de base » d'une dérivée, à savoir le passage à la limite de la variation du vecteur entre deux instants rapprochés :

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t)), \forall \mathbf{c}, \forall t$$

formule que l'on peut interpréter à l'aide des composantes (c_1, c_2, c_3) du vecteur $\mathbf{c}$ dans une base fixe $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$:

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \dot{c}_1(t)\mathbf{i}_1 + \dot{c}_2(t)\mathbf{i}_2 + \dot{c}_3(t)\mathbf{i}_3$$

De la même façon, la dérivation par rapport au temps d'un tenseur peut s'exprimer comme :

$$\dot{\mathbb{A}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{A}(t + \Delta t) - \mathbb{A}(t)), \forall \mathbf{c}, \forall t$$

que l'on peut aussi interpréter à l'aide des composantes A_{ij} du tenseur $\mathbb{A}$ dans une base fixe $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$:

$$\dot{\mathbb{A}}(t) = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \dot{A}_{mn}(t) \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n$$

Ceci a comme conséquence pratique que toutes les propriétés classiques de la dérivation se vérifient :

$$\overline{(\mathbf{c}_1(t) + \mathbf{c}_2(t))} = \dot{\mathbf{c}}_1(t) + \dot{\mathbf{c}}_2(t), \forall \mathbf{c}_1, \forall \mathbf{c}_2, \forall t$$

$$\overline{(\mathbb{A}(t) + \mathbb{B}(t))} = \dot{\mathbb{A}}(t) + \dot{\mathbb{B}}(t), \forall \mathbb{A}, \forall \mathbb{B}, \forall t$$

$$\overline{\langle \mathbf{c}_1(t), \mathbf{c}_2(t) \rangle} = \langle \dot{\mathbf{c}}_1(t), \mathbf{c}_2(t) \rangle + \langle \mathbf{c}_1(t), \dot{\mathbf{c}}_2(t) \rangle, \forall \mathbf{c}_1, \forall \mathbf{c}_2, \forall t$$

$$\overline{(\mathbf{c}_1(t) \wedge \mathbf{c}_2(t))} = \dot{\mathbf{c}}_1(t) \wedge \mathbf{c}_2(t) + \mathbf{c}_1(t) \wedge \dot{\mathbf{c}}_2(t), \forall \mathbf{c}_1, \forall \mathbf{c}_2, \forall t$$

$$\overline{(\mathbb{A}(t)\mathbb{B}(t))} = \dot{\mathbb{A}}(t)\mathbb{B}(t) + \mathbb{A}(t)\dot{\mathbb{B}}(t), \forall \mathbb{A}, \forall \mathbb{B}, \forall t$$

$$\overline{(\lambda(t)\mathbf{c}(t))} = \dot{\lambda}(t)\mathbf{c}(t) + \lambda(t)\dot{\mathbf{c}}(t), \forall \lambda, \forall \mathbf{c}, \forall t$$

$$\overline{(\lambda(t)\mathbb{A}(t))} = \dot{\lambda}(t)\mathbb{A}(t) + \lambda(t)\dot{\mathbb{A}}(t), \forall \lambda, \forall \mathbb{A}, \forall t$$

L'avant-dernière relation, si l'on suppose que $\mathbf{c}$ est un vecteur unitaire, montre ainsi comment on peut calculer la dérivée d'un vecteur dont la norme évolue au cours du temps. En outre, il faut également être capable d'exprimer la variation de la direction (et du sens) d'un vecteur en termes de dérivée temporelle ; c'est ce qui est proposé dans ce qui suit.

Vecteur vitesse de rotation

En dérivant par rapport au temps la propriété associée à l'orthogonalité du tenseur de rotation ($\mathbb{R}\mathbb{R}^T = \mathbb{I}$), établie dans le paragraphe A.2.6, on obtient :

$$\dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T + \mathbb{R}\dot{\mathbb{R}}^T = 0$$

ou encore, en posant $\Omega_{\mathbb{R}} = \dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T$:

$$\Omega_{\mathbb{R}} = \dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T = -\left(\dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T\right)^T = -\Omega_{\mathbb{R}}^T$$

ce qui signifie que $\Omega_{\mathbb{R}}$ est un tenseur antisymétrique. Celui-ci constitue ce que l'on appelle, en mécanique des fluides, le tenseur des vitesses de rotation ; tandis que ce dernier peut alors dépendre du point considéré, le tenseur $\Omega_{\mathbb{R}}$ associé à un mouvement de solide indéformable est le même sur tout le domaine du solide considéré.

En outre, puisque $\Omega_{\mathbb{R}}$ est antisymétrique, il est possible, comme évoqué dans le paragraphe A.2.1, de lui associer un vecteur, noté $\omega_{\mathbb{R}}$, appelé vecteur vitesse de rotation, qui vérifie donc :

$$\omega_{\mathbb{R}} \wedge \mathbf{c} = \omega_{\mathbb{R}}^{\wedge} \mathbf{c} = \Omega_{\mathbb{R}} \mathbf{c} = \dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T \mathbf{c}, \forall \mathbf{c}$$

Ainsi, si, dans une base donnée $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, la matrice s'écrit :

$$\Omega_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

le vecteur vitesse de rotation $\omega_{\mathbb{R}}$ associé a pour composantes dans cette même base :

$$(\omega_1 = -\Omega_{23}, \omega_2 = \Omega_{13}, \omega_3 = -\Omega_{12})$$

Ceci permet d'exprimer la dérivée temporelle d'un vecteur : pour cela, considérons un vecteur pouvant s'exprimer comme $\mathbf{c}(t) = \mathbb{R}(t)\mathbf{c}_0$, où $\mathbf{c}_0$ est supposé fixe. On peut alors écrire que :

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbb{R}}\mathbf{c}_0 = \Omega_{\mathbb{R}}\mathbb{R}\mathbf{c}_0 = \Omega_{\mathbb{R}}\mathbf{c} = \omega_{\mathbb{R}} \wedge \mathbf{c}$$

B.2 Transformations d'intégrales

B.2.1 Changements de variables

L'objet de ce paragraphe est de pouvoir effectuer le changement de variables $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ lorsque l'on suit un ensemble de particules au cours de leur mouvement, afin d'estimer une quantité obtenue par intégration.

Intégrale de volume

Le volume d'un parallélépipède construit à partir de trois vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ peut s'exprimer à l'aide du produit mixte :

$$\mathcal{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle|$$

Ainsi, si l'on considère un volume élémentaire au voisinage d'un point $\mathbf{p}$, et représenté par un parallélépipède construit à partir de trois vecteurs élémentaires $d\mathbf{p}_1$, $d\mathbf{p}_2$ et $d\mathbf{p}_3$, qui deviennent $d\mathbf{x}_1$, $d\mathbf{x}_2$ et $d\mathbf{x}_3$ à l'instant t , le volume associé peut s'exprimer comme :

$$|\langle d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2 \wedge d\mathbf{x}_3 \rangle| = |\langle \mathbb{F} d\mathbf{p}_1, (\mathbb{F} d\mathbf{p}_2) \wedge (\mathbb{F} d\mathbf{p}_3) \rangle|$$

où $\mathbb{F}$ est le tenseur gradient de la transformation. En utilisant le résultat de l'annexe A.2.3, on établit alors que :

$$|\langle d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2 \wedge d\mathbf{x}_3 \rangle| = |\det \mathbb{F} \langle d\mathbf{p}_1, d\mathbf{p}_2 \wedge d\mathbf{p}_3 \rangle| = \det \mathbb{F} |\langle d\mathbf{p}_1, d\mathbf{p}_2 \wedge d\mathbf{p}_3 \rangle|$$

vu que $\det \mathbb{F} > 0$.

Ce résultat permet alors d'exprimer le changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ dans une intégrale de volume, en écrivant que :

$$\int_{\Omega_t} \phi(\mathbf{x}) dV_x = \int_{\Omega_0} \phi(\mathbf{f}(\mathbf{p}, t)) \det \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) dV_p$$

où ϕ est un champ scalaire donné.

Intégrale de surface

L'aire d'un parallélogramme construit à partir de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ peut s'exprimer simplement comme :

$$\mathcal{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|$$

Ainsi, si l'on considère une surface élémentaire au voisinage d'un point $\mathbf{p}$, et représentée par un parallélogramme construit à partir de deux vecteurs élémentaires $d\mathbf{p}_1$ et $d\mathbf{p}_2$, qui deviennent $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$ à l'instant t , l'aire associée peut alors s'exprimer comme :

$$\|d\mathbf{x}_1 \wedge d\mathbf{x}_2\| = \|(\mathbb{F} d\mathbf{p}_1) \wedge (\mathbb{F} d\mathbf{p}_2)\|$$

avec $\mathbb{F}$ le gradient de la transformation. En utilisant la formule de Piola établie dans l'annexe A.2.3, on aboutit à :

$$\|d\mathbf{x}_1 \wedge d\mathbf{x}_2\| = \|(\det \mathbb{F}) \mathbb{F}^{-T} (d\mathbf{p}_1 \wedge d\mathbf{p}_2)\| = \det \mathbb{F} \|\mathbb{F}^{-T} (d\mathbf{p}_1 \wedge d\mathbf{p}_2)\|$$

vu que $\det \mathbb{F} > 0$. Par ailleurs, en posant $d\mathbf{p}_1 \wedge d\mathbf{p}_2 = dS_0 \mathbf{n}_p$, où $\mathbf{n}_p$ est la normale unitaire sortante à la surface élémentaire dans sa configuration initiale, on peut exprimer le changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ dans une intégrale de surface, en écrivant que :

$$\int_{S_t} \phi(\mathbf{x}) dS_x = \int_{S_0} \phi(\mathbf{f}(\mathbf{p}, t)) \det \mathbb{F}(\mathbf{p}, t) \|\mathbb{F}^{-T} \mathbf{n}_p\| dS_p$$

où ϕ est un champ scalaire donné.

B.2.2 Formules de Stokes

Les formules de Stokes jouent un rôle prépondérant dans beaucoup de cas, par exemple quand il s'agit de faire des bilans entre les variations de grandeurs à l'intérieur d'un domaine et les flux surfaciques correspondants sur les frontières de ce domaine. Elles sont d'un usage courant en électromagnétisme, où les équations de Maxwell sont souvent introduites à partir des lois de Biot et Savart. En mécanique, c'est surtout la formule de la divergence qui est employée.

Formule du gradient

On considère un domaine Ω_t , de frontière $\partial\Omega_t$ régulière, avec une normale sortante $\mathbf{n}$ en tout point $\mathbf{x}$, ainsi qu'un champ scalaire $\phi(\mathbf{x})$ lui aussi régulier. On a alors la formule de Stokes, aussi appelée formule du gradient :

$$\int_{\partial\Omega_t} \phi \mathbf{n} dS_x = \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \phi dV_x$$

Le principe de la démonstration consiste à diviser le domaine Ω_t en petits cubes élémentaires V , pour lesquels on peut écrire, par exemple pour les faces parallèles à l'axe $\mathbf{i}_1$ de coordonnée cartésienne associée x_1 :

$$\int_{S(x_1^+)} \phi \, dS - \int_{S(x_1^-)} \phi \, dS = \int_S \int_{x_1^-}^{x_1^+} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \, dx_1 \, dS = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \, dV$$

Pour deux cubes adjacents qui sont à l'intérieur du domaine, les intégrales sur les faces s'annulent deux à deux, car les normales sont opposées ; il ne reste donc que les faces des cubes qui sont tronquées par la frontière $\partial\Omega_t$ du domaine, pour laquelle un paramétrage adapté permet d'obtenir le résultat.

Mathématiquement aussi bien que physiquement, cette formule du gradient est une généralisation tridimensionnelle de la relation entre primitive et dérivée que l'on peut écrire pour des fonctions d'une variable. En outre, si l'on considère un domaine de taille infinitésimale, on obtient que :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \phi \approx \frac{1}{|\Omega_t|} \int_{\partial\Omega_t} \phi \mathbf{n} \, dS_t$$

Formule de la divergence

On déduit de la formule de Stokes la formule dite de la divergence, qui s'exprime comme :

$$\int_{\partial\Omega_t} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \, dS_x = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \, dV_x$$

Physiquement, la divergence apparaît alors comme la valeur moyenne du flux sur la frontière du domaine, si l'on considère que celui-ci est de taille infinitésimale :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \approx \frac{1}{|\Omega_t|} \int_{\partial\Omega_t} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \, dS_x$$

En utilisant la définition de la divergence d'un tenseur $\mathbb{A}(\mathbf{x})$, rappelée dans le paragraphe B.1.1, on obtient une formule analogue à la précédente :

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbb{A} \mathbf{n} \, dS_x = \int_{\Omega_t} \mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{A} \, dV_x$$

ce qui permet, lorsque la taille du domaine est infinitésimale, d'interpréter physiquement la divergence du tenseur comme :

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{A} \approx \frac{1}{|\Omega_t|} \int_{\partial\Omega_t} \mathbb{A} \mathbf{n} \, dS_x$$

Enfin, en partant de la définition de la divergence d'un tenseur $\mathbb{A}(\mathbf{x})$ symétrique, on peut établir que :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\mathbb{A}^T (\mathbf{c} \wedge \mathbf{x})) = \langle \mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{A}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{x} \rangle + \operatorname{tr} (\mathbb{A} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} (\mathbf{c} \wedge \mathbf{x})))^T$$

avec $\mathbf{x}$ le vecteur position, et $\mathbf{c}$ un vecteur constant arbitraire ; on obtient alors en particulier que :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{x}} (\mathbf{c} \wedge \mathbf{x}) = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial (\mathbf{c} \wedge \mathbf{x})}{\partial x_n} \otimes \mathbf{i}_n = \sum_{n=1}^3 (\mathbf{c} \wedge \mathbf{i}_n) \otimes \mathbf{i}_n$$

où $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ est une base cartésienne, de coordonnées associées (x_1, x_2, x_3) . La formule de la divergence nous permet ensuite d'écrire que :

$$\int_{\partial\Omega_t} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \wedge \mathbb{A} \mathbf{n} \rangle \, dS_x = \int_{\partial\Omega_t} \langle \mathbb{A} (\mathbf{c} \wedge \mathbf{x}), \mathbf{n} \rangle \, dS_x = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\mathbb{A} (\mathbf{c} \wedge \mathbf{x})) \, dV_x$$

et en utilisant les résultats précédents, on aboutit finalement à une formule de la divergence avec produit vectoriel :

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{x} \wedge \mathbb{A} \mathbf{n} \, dS_x = \int_{\Omega_t} \left(\mathbf{x} \wedge \mathbf{div}_{\mathbf{x}} \mathbb{A} + \sum_{n=1}^3 \mathbf{i}_n \wedge \mathbb{A} \mathbf{i}_n \right) \, dV_x$$

Formules dérivées

En utilisant la relation remarquable suivante, valable pour tout champ vectoriel $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ et un vecteur $\mathbf{c}$ constant arbitraire :

$$\langle \mathbf{rot}_x \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle = \text{div}_x(\mathbf{v} \wedge \mathbf{c})$$

on établit une formule dérivée :

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} dS_x = \int_{\Omega_t} \mathbf{rot}_x \mathbf{v} dV_x$$

qui permet d'obtenir une interprétation du rotationnel quand la taille du domaine considéré devient infinitésimale :

$$\mathbf{rot}_x \mathbf{v} \approx \frac{1}{|\Omega_t|} \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} dS_x$$

Enfin, on peut établir une formule concernant le tenseur gradient d'un champ vectoriel $\mathbf{v}(\mathbf{x})$:

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} dS_x = \int_{\Omega_t} \mathbb{D}_x \mathbf{v} dV_x$$

B.3 Formulaires

B.3.1 Changement de coordonnées

Dans le cas de géométries particulières, il est souvent plus intéressant de se donner des bases vectorielles (et des coordonnées associées) qui leur soient liées naturellement. Dans ce cas, on peut exprimer l'ensemble des opérateurs introduits dans ce qui précède à l'aide de ces nouveaux systèmes de coordonnées ; le principe consiste alors à effectuer des changements de variables dans les expressions que l'on a établies dans le cas des coordonnées cartésiennes.

Par exemple, si l'on cherche à calculer le tenseur gradient d'un vecteur $\mathbf{v}$ exprimé à l'aide de coordonnées curvilignes (ξ, η, ζ) particulières, on établit que :

$$\mathbb{D}_x \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} \otimes \nabla_x \xi + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} \otimes \nabla_x \eta + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta} \otimes \nabla_x \zeta$$

et pour la divergence d'un tenseur $\mathbb{A}$:

$$\text{div}_x \mathbb{A} = \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \xi} \nabla_x \xi + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \eta} \nabla_x \eta + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \zeta} \nabla_x \zeta$$

On donne ci-dessous les expressions des différents opérateurs dans les deux systèmes de coordonnées classiques cylindriques et sphériques.

B.3.2 Coordonnées cylindriques

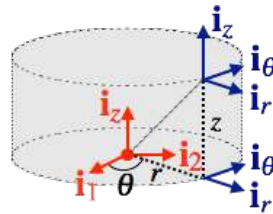


FIGURE B.1 – Base cylindrique et coordonnées associées.

On rappelle qu'un point de l'espace vérifie le vecteur position suivant :

$$\mathbf{x} = r\mathbf{i}_r(\theta) + z\mathbf{i}_z$$

où, vis-à-vis d'une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, avec $\mathbf{i}_3$ comme axe du cylindre, et (x_1, x_2, x_3) comme coordonnées associées, les vecteurs de base vérifient :

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_r(\theta) &= \cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \theta \mathbf{i}_2, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[\\ \mathbf{i}_\theta(\theta) &= -\sin \theta \mathbf{i}_1 + \cos \theta \mathbf{i}_2, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[\\ \mathbf{i}_z &= \mathbf{i}_3\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z$$

les relations inverses étant alors données par :

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad z = x_3$$

pour $x_1 \neq 0$. Les dérivées des vecteurs de base vérifient alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \mathbf{i}_r(\theta) &= -\sin \theta \mathbf{i}_1 + \cos \theta \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_\theta(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[\\ \frac{d}{d\theta} \mathbf{i}_\theta(\theta) &= -\cos \theta \mathbf{i}_1 - \sin \theta \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_r(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

tandis que les gradients des coordonnées s'établissent comme :

$$\nabla_{\mathbf{x}} r = \mathbf{i}_r(\theta), \quad \nabla_{\mathbf{x}} \theta = \frac{\mathbf{i}_\theta(\theta)}{r}, \quad \nabla_{\mathbf{x}} z = \mathbf{i}_z$$

Enfin, un volume élémentaire s'écrit comme :

$$dV_x = r dr d\theta dz$$

tandis qu'un élément de surface s'exprime, selon la coordonnée qui reste constante, comme :

$$dS_x^r = r d\theta dz, \quad dS_x^\theta = dr dz, \quad \text{et} \quad dS_x^z = r dr d\theta$$

Expression des opérateurs classiques

Pour un champ scalaire $\psi(r, \theta, z)$ et un champ vectoriel $\mathbf{v}(r, \theta, z) = v_r(r, \theta, z)\mathbf{i}_r + v_\theta(r, \theta, z)\mathbf{i}_\theta + v_z(r, \theta, z)\mathbf{i}_z$ donnés, on peut établir que :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{i}_z \\ \Delta_{\mathbf{x}} \psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \text{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{i}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_\theta + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_z \\ \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \mathbf{i}_r \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) \mathbf{i}_\theta \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{i}_z\end{aligned}$$

Équations de la mécanique

Dans le cas d'un déplacement $\mathbf{u}(r, \theta, z) = u_r(r, \theta, z)\mathbf{i}_r + u_\theta(r, \theta, z)\mathbf{i}_\theta + u_z(r, \theta, z)\mathbf{i}_z$, on établit que le tenseur des petites déformations s'écrit comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \otimes_S \mathbf{i}_r + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} \otimes_S \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \otimes_S \mathbf{i}_z$$

soit, en composantes matricielles dans la base cylindrique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \text{sym.} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \text{sym.} & \text{sym.} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_z)}$$

En outre, dans le cas d'un champ de contraintes s'écrivant :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sigma_{rr}(r, \theta, z)\mathbf{i}_r(\theta) \otimes \mathbf{i}_r(\theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z)\mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{i}_\theta(\theta) + \sigma_{zz}(r, \theta, z)\mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z \\ + 2\sigma_{r\theta}(r, \theta, z)\mathbf{i}_r(\theta) \otimes_S \mathbf{i}_\theta(\theta) + 2\sigma_{rz}(r, \theta, z)\mathbf{i}_r(\theta) \otimes_S \mathbf{i}_z + 2\sigma_{\theta z}(r, \theta, z)\mathbf{i}_\theta(\theta) \otimes_S \mathbf{i}_z$$

on peut exprimer la divergence du tenseur des contraintes comme :

$$\text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \theta} \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} \mathbf{i}_z$$

soit, dans la base cylindrique :

$$\text{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \mathbf{i}_r \\ + \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right) \mathbf{i}_\theta \\ + \left(\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) \mathbf{i}_z$$

B.3.3 Coordonnées sphériques

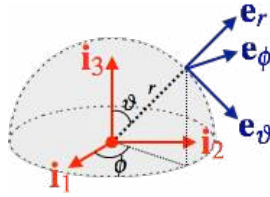


FIGURE B.2 – Base sphérique et coordonnées associées.

On rappelle qu'un point de l'espace vérifie le vecteur position suivant :

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi)$$

où, vis-à-vis d'une base cartésienne $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, avec (x_1, x_2, x_3) comme coordonnées associées, les vecteurs de base vérifient :

$$\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) = \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{i}_1 + \sin \vartheta \sin \phi \mathbf{i}_2 + \cos \vartheta \mathbf{i}_3, \quad \forall \vartheta \in [0, \pi[, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[\\ \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) = \cos \vartheta \cos \phi \mathbf{i}_1 + \cos \vartheta \sin \phi \mathbf{i}_2 - \sin \vartheta \mathbf{i}_3, \quad \forall \vartheta \in [0, \pi[, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[\\ \mathbf{e}_\phi(\phi) = -\sin \phi \mathbf{i}_1 + \cos \phi \mathbf{i}_2, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[$$

ce qui implique que :

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \vartheta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \vartheta$$

les relations inverses étant alors données par :

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \vartheta = \arccot \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \phi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

pour $x_1 \neq 0$ et $x_3 \neq 0$. Les dérivées des vecteurs de base vérifient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) &= \cos \vartheta \cos \phi \mathbf{i}_1 + \cos \vartheta \sin \phi \mathbf{i}_2 - \sin \vartheta \mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi), \quad \forall \vartheta \in [0, \pi[, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[\\ \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) &= -\sin \vartheta \sin \phi \mathbf{i}_1 + \sin \vartheta \cos \phi \mathbf{i}_2 + \cos \vartheta \mathbf{i}_3 = \sin \vartheta \mathbf{e}_\phi(\phi), \quad \forall \vartheta \in [0, \pi[, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[\\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) &= -\sin \vartheta \cos \phi \mathbf{i}_1 - \sin \vartheta \sin \phi \mathbf{i}_2 - \cos \vartheta \mathbf{i}_3 = -\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi), \quad \forall \vartheta \in [0, \pi[, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[\\ \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) &= -\cos \vartheta \sin \phi \mathbf{i}_1 + \cos \vartheta \cos \phi \mathbf{i}_2 - \sin \vartheta \mathbf{i}_3 = \cos \vartheta \mathbf{e}_\phi(\phi), \quad \forall \vartheta \in [0, \pi[, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[\\ \frac{d}{d\phi} \mathbf{e}_\phi(\phi) &= -\cos \phi \mathbf{i}_1 - \sin \phi \mathbf{i}_2 = -\sin \vartheta \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) - \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi), \quad \forall \vartheta \in [0, \pi[, \quad \forall \phi \in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

tandis que les gradients des coordonnées s'établissent comme :

$$\nabla_x r = \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi), \quad \nabla_x \vartheta = \frac{\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi)}{r}, \quad \nabla_x \phi = \frac{\mathbf{e}_\phi(\phi)}{r \sin \vartheta}$$

Enfin, un volume élémentaire s'écrit comme :

$$dV_x = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\phi$$

tandis qu'un élément de surface s'exprime, selon la coordonnée qui reste constante, comme :

$$dS_x^r = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi, \quad dS_x^\vartheta = r \sin \vartheta dr d\phi, \quad \text{et} \quad dS_x^\phi = r dr d\vartheta$$

Expression des opérateurs classiques

Pour un champ scalaire $\psi(r, \vartheta, \phi)$ et un champ vectoriel $\mathbf{v}(r, \vartheta, \phi) = v_r(r, \vartheta, \phi) \mathbf{e}_r + v_\vartheta(r, \vartheta, \phi) \mathbf{e}_\vartheta + v_\phi(r, \vartheta, \phi) \mathbf{e}_\phi$, donnés, on peut établir que :

$$\begin{aligned} \nabla_x \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \\ \Delta_x \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \tan^2 \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\ \text{div}_x \mathbf{v} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2 \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \frac{v_\vartheta}{r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \\ \text{rot}_x \mathbf{v} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial(v_\phi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r v_\phi \sin \vartheta)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\vartheta + \left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\phi \\ \Delta_x \mathbf{v} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r v_r)}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} (v_r + v_\vartheta \cot \vartheta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r v_\vartheta)}{\partial r^2} - \frac{v_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \phi^2} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_\vartheta \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r v_\phi)}{\partial r^2} - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

Équations de la mécanique

Dans le cas d'un déplacement $\mathbf{u}(r, \vartheta, \phi) = u_r(r, \vartheta, \phi)\mathbf{e}_r + u_\vartheta(r, \vartheta, \phi)\mathbf{e}_\vartheta + u_\phi(r, \vartheta, \phi)\mathbf{e}_\phi$, on établit que le tenseur des petites déformations s'écrit comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \otimes_S \mathbf{e}_r + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \vartheta} \otimes_S \frac{\mathbf{e}_\vartheta}{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} \otimes_S \frac{\mathbf{e}_\phi}{r \sin \vartheta}$$

soit, en composantes matricielles dans la base sphérique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) \\ \text{sym.} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \vartheta} - (\cot \vartheta) u_\phi \right) + \frac{1}{2r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \phi} \\ \text{sym.} & \text{sym.} & \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \cot \vartheta \frac{u_\vartheta}{r} + \frac{u_r}{r} \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\phi)}$$

En outre, dans le cas d'un champ de contraintes s'écrivant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(r, \vartheta, \phi) = & \sigma_{rr}(r)\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) + \sigma_{\vartheta\vartheta}(r)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) \otimes \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) + \sigma_{\phi\phi}(r)\mathbf{e}_\phi(\phi) \otimes \mathbf{e}_\phi(\phi) \\ & + 2\sigma_{r\vartheta}(r)\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) \otimes_S \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) + 2\sigma_{r\phi}(r)\mathbf{e}_r(\vartheta, \phi) \otimes_S \mathbf{e}_\phi(\phi) \\ & + 2\sigma_{\vartheta\phi}(r)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \phi) \otimes_S \mathbf{e}_\phi(\phi) \end{aligned}$$

on peut exprimer la divergence du tenseur des contraintes comme :

$$\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \vartheta} \frac{\mathbf{e}_\vartheta}{r} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \phi} \frac{\mathbf{e}_\phi}{r \sin \vartheta}$$

soit, dans la base sphérique :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = & \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\vartheta} \cot \vartheta}{r} \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\phi}}{\partial \phi} + \frac{(\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\phi\phi}) \cot \vartheta + 3\sigma_{r\vartheta}}{r} \right) \mathbf{e}_\vartheta \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\phi}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{3\sigma_{r\phi} + 2\sigma_{\vartheta\phi} \cot \vartheta}{r} \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$



Références bibliographiques

Ouvrages

- [BW97] Javier BONET et Richard D. WOOD. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997, pages 1-283 (cf. pages 14, 141).
- [BF07] Marc BONNET et Attilio FRANGI. *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Éditions de l'École Polytechnique, 2007, pages 1-298 (cf. page 141).
- [Lem+09] Jean LEMAITRE et al. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 2009, pages 1-572 (cf. pages 75, 91, 93, 97, 103).
- [RHB07] Joachim RÖSLER, Harald HARDERS et Martin BÄKER. *Mechanical behaviour of engineering materials*. Springer, 2007, pages 1-540 (cf. pages 75, 91, 93, 97, 103).
- [Sad14] Martin H. SADD. *Elasticity – Theory, applications, and numerics*. Academic Press, 2014, pages 1-582 (cf. pages 55, 139, 141, 148, 165).
- [Sal05] Jean SALENÇON. *Mécanique des milieux continus*. Tome 1. Éditions de l'École Polytechnique, 2005, pages 1-360 (cf. pages 7, 14, 41, 55, 137).
- [Sal07] Jean SALENÇON. *Mécanique des milieux continus*. Tome 2. Éditions de l'École Polytechnique, 2007, pages 1-314 (cf. pages 116, 139, 148).
- [Sal12] Jean SALENÇON. *Mécanique des milieux continus*. Tome 3. Éditions de l'École Polytechnique, 2012, pages 1-162 (cf. page 165).

Articles

- [BS97] Jean-Jacques BARRAU et Michel SUDRE. “Modélisation des structures par éléments finis”. In : *Techniques de l'Ingénieur* BM5015 (1997), pages 1-13 (cf. page 141).
- [Bou87] Michel BOUCHER. “Mécanique des milieux continus”. In : *Techniques de l'Ingénieur* A249 (1987), pages 1-35 (cf. pages 7, 41, 137).
- [Bré+11] Fabrice BRÉMAND et al. “Mesures en mécanique par méthodes optiques”. In : *Techniques de l'Ingénieur* R1850 (2011), pages 1-25 (cf. pages 31, 80).

- [CBG13] Bruno CASTANIÉ, Christophe BOUVET et Didier GUEDRA-DEGEORGES. “Structures en matériaux composites stratifiés”. In : *Techniques de l’Ingénieur* BM5080 (2013), pages 1-29 (cf. page 92).
- [CT87] Jean COURBON et Jean-Noël THEILLOUT. “Résistance des matériaux – Sections usuelles”. In : *Techniques de l’Ingénieur* B5020 (1987), pages 1-12 (cf. page 189).
- [Fra05] Dominique FRANÇOIS. “Lois de comportement des métaux – Élastoplasticité, viscoplasticité”. In : *Techniques de l’Ingénieur* M4152 (2005), pages 1-25 (cf. page 103).
- [JL98] Lu JIAN et Henri-Paul LIEURADE. “Concentration de contraintes”. In : *Techniques de l’Ingénieur* BM5040 (1998), pages 1-24 (cf. page 93).
- [Ran03] Nicolas RANC. “Couplage thermomécanique”. In : *Techniques de l’Ingénieur* AF5042 (2003), pages 1-12 (cf. page 116).



Index

A

Accélération
matérielle 7, 122
Accommodation 105
Action mécanique 42–46, 201
Adaptation 105
Allongement 15, 26, 160, 161, 166
uniforme 5, 8, 10, 16, 18, 26, 34
Approche
en contraintes voir Résolution –
approche en contraintes
en déplacement voir Résolution –
approche en déplacement
Axisymétrie 148, 149

C

Cercles de Mohr 81, 85
Charge critique de flambage 212
Cisaillement ... 78, 84, 87, 90, 111, 167, 168,
184, 194, 195
Cission voir Cisaillement
Clivage voir Rupture par clivage
Coefficient
de dilatation thermique 116, 137
de Poisson 110–113

Composite 91
Compression voir Traction
Conditions
aux limites 63, 65, 66,
71, 102, 123–125, 129, 134, 140, 171,
174, 178, 180, 181, 191
initiales 102, 123, 125
Conservation
de la masse 36–37, 122
de la quantité de mouvement 40–41, 121
du moment cinétique 41–42
Contraintes .. 48–57, 101, 121, 133–139, 147,
183, 193
antiplanes 168
concentrations 93
conventionnelles 74
déviateur 88, 90
de cisaillement voir Cisaillement
normales 78, 167, 168, 184, 193–195, 208
principales 79, 83, 87, 90, 109
rationnelles 74
tangentielles voir Cisaillement
vecteur voir Vecteur contrainte
Coordonnées
cylindriques . 6, 7, 25, 61, 113, 117, 148,
175, 181, 221, 240
sphériques 55, 62, 149, 221, 243
Couple 43, 124, 131
Critère

de Mohr-Coulomb 92
 de Tresca 87, 90
 de Tsai-Hill 91
 de von Mises 89, 90

D

Décomposition polaire 14, 227
 Déformations
 de Green-Lagrange 15, 21
 petites .. 22–32, 101, 121, 136, 137, 159,
 162, 164, 166, 183
 principales 30, 109
 thermiques 115, 137
 Delta de Kronecker 222
 Densité linéique
 d'effort 170, 171, 174, 175
 de moment 177, 178, 180, 181
 Déplacement .. 4, 22, 28, 101, 129–133, 136,
 145, 157, 158, 162, 163, 166, 196
 longitudinal 158, 184, 191, 207
 transverse 158, 164, 184, 192, 208
 Déterminant 33, 35, 225, 227, 238
 Diagrammes des efforts intérieurs 182
 Dislocation 73, 76
 Distorsion voir Glissement
 Divergence
 d'un tenseur 58, 59, 61, 234, 239
 d'un vecteur 34–36, 234, 239
 Ductile 72, 76, 85, 90

E

Écrouissage 104
 Effort
 normal 169, 173, 184, 185, 191, 193, 207
 tranchant .. 169, 173, 181, 184, 185, 194
 Élasticité 72, 103
 limite 72, 74, 87, 89, 90, 103
 linéaire 105, 183
 tenseur 106
 Éléments finis 141
 Élongation voir Allongement
 Endommagement 104
 Éprouvette 70
 Équation
 de Navier 132
 Équations

de Beltrami 139, 146, 148
 de compatibilité 136, 137, 139, 148
 Équilibre
 global . 44, 47, 51, 53, 55, 126, 169–173,
 176–180, 204–206
 local 57–66, 102, 121, 129, 130, 134, 135,
 173–175, 180–182, 203, 206, 210
 Essai brésilien 84
 Extensométrie 31

F

Facette 47, 51, 77–83, 85, 87, 88, 168
 Fatigue 93, 105
 Flambement 209
 Flexion 80, 158, 160, 161, 166
 trois points 156, 163, 164, 205, 207
 Fluage 104
 Fonction
 d'Airy 148
 de forme 142
 Formule
 de Jacobi 220
 de la divergence 175, 239
 de Piola 226, 238
 de Stokes 58
 du gradient 238
 Fragile 72, 75, 82

G

Gauchissement 130, 141, 163, 191
 Glissement 17, 26, 73, 85, 111, 158, 160, 161,
 164, 166
 sans frottement 123, 125, 151
 uniforme 5, 11, 19, 27
 Glisseur 43, 44
 Gradient
 de la transformation 9–13
 tensoriel 9–14, 233
 vectoriel 233

H

Hyperstatisme 202–209
 Hypothèse
 d'Euler-Bernoulli voir Poutre
 d'Euler-Bernoulli

de contraintes planes 147, 149
 de déformations planes 145, 149
 des petites perturbations . 22, 28, 34–36,
 101, 122, 127, 157, 196

I

Incompressibilité 35–37, 113
 Inertie
 de section 179, 185, 187–191
 polaire de section ... 141, 186–191, 195
 principale 187–191
 produit 191
 Isostatisme *voir* Hyperstatisme
 Isotropie 108–109, 231
 transverse 231

L

Laplacien
 scalaire 130, 134, 191, 235
 tensoriel 139
 vectoriel 132, 133, 235
 Liaison 196–209
 complète *voir* encastrement
 encastrement 196, 197, 202
 parfaite 200
 pivot 199
 sphère-cylindre 200
 sphérique 198, 201
 Ligne moyenne 155
 Limite d'élasticité *voir* Élasticité
 Loi
 de Hooke 109, 113, 122, 183
 de Schmid 85

M

Masse 36, 43, 53
 volumique 1, 36, 43, 122
 Mode de flambage 212
 Module
 d'incompressibilité 113
 de cisaillement 111, 184–186
 de Young 110–113, 184–186
 Moment
 d'une action mécanique .. 42, 43, 45, 46,
 124, 131, 140, 200, 201

de flexion . 175, 181, 185, 186, 188, 192,
 193, 208
 de torsion 175, 186, 188, 192, 194
 des efforts intérieurs 175–203

N

Norme
 tensorielle 89, 225
 vectorielle 6, 16, 87, 220
 Notation de Voigt 107, 230

O

Orthotropie 230

P

Paramètres de Lamé 109, 111, 113, 146
 Pesanteur . 43, 51, 58, 64, 172, 175, 178, 181,
 191, 195
 Photoélasticité 80, 94, 96–98, 140
 Placement 3, 4, 157, 196
 Plasticité 72, 103
 Portique 197, 203
 Poussée d'Archimède 53, 59
 Poutre
 d'Euler-Bernoulli ... 163–166, 185, 186,
 188, 192, 196, 197, 208, 209
 de Timoshenko 158, 162, 185, 186, 188
 Pression 53, 172, 175, 178, 181, 191
 hydrostatique 64, 121
 réservoir .. *voir* Réservoir sous pression
 Principe
 d'action-réaction 40, 48, 65
 de Saint-Venant . 72, 139–141, 164, 167
 de superposition 144
 fondamental de la dynamique *voir*
 Conservation
 Produit
 contracté 89, 225
 mixte 33, 220, 237
 scalaire 4, 17, 220
 tensoriel 10, 12, 24, 50, 61, 223
 vectoriel 29, 35, 157, 220, 229

R

Racine carrée d'un tenseur 14, 227
 Relaxation 104
 Réservoir sous pression 55, 62, 66
 Résistance 74, 82, 84
 Résolution
 approche en contraintes 133–139
 approche en déplacement 129–133
 Résultante
 d'une action mécanique 42, 43,
 45, 46, 53, 59, 71, 124, 131, 140, 171,
 173, 178, 200, 201
 des efforts intérieurs 168–175, 184, 185,
 195, 203
 Rochet 105
 Rotation 6, 12, 14, 20, 24, 108, 226, 227
 de flexion 158, 164, 184, 185
 de section 157, 158
 de torsion 7, 158, 186, 192
 petite ... 24, 29, 124, 127, 130, 138, 157,
 196, 229
 Rotationnel
 d'un tenseur 137, 234
 d'un vecteur 234
 Rupture
 par cisaillement 85, 90
 par clivage 75, 82, 85

S

Section 155, 168, 193, 196
 Striction 73, 76
 Symétrie 150, 151
 cubique 230

T

Tenseur iv, 222
 d'élasticité voir Élasticité
 d'inertie de section voir Inertie
 de souplesse voir Élasticité
 des contraintes voir Contraintes
 des déformations de Green-Lagrange ...
 voir Déformations
 des dilatations 16

des petites déformations voir
 Déformations
 des petites déformations thermiques voir
 Déformations
 gradient
 de la transformation, voir Gradient
 invariants 79, 89, 226
 trace 34, 88, 89, 224
 transposé 16, 223
 Théorème
 de Rivlin-Ericksen 109, 231
 Torsion . 7, 8, 13, 20, 23, 29, 30, 35, 124, 128,
 130, 134, 140, 158, 161–163, 166
 Traction 52, 65, 70, 78, 80, 82, 86, 88, 90, 109,
 140, 163
 Trajectoire 4

V

Variation
 de surface 35, 238
 de volume 33, 35, 112, 237
 Vecteur contrainte . 47, 49, 55, 168, 175, 193,
 195
 Viscoélasticité 104
 Vitesse
 de rotation 237
 matérielle 7